LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

CALCUL DU RÉGIME CRITIQUE D'UNE PILE CYLINDRIQUE MUNIE D'UN RÉFLECTEUR

Par J. YVON
Commissariat à l'Énergie atomique.
Laboratoires du Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses (Seine).

Sommaire. — Le laplacien d'une pile atomique constituée d'un cylindre multiplicateur noyé jusqu'à sa face supérieure dans une masse de graphite est évalué par une méthode de perturbation en profitant de l'hermiticité des opérateurs en cause. Le cas où une paroi mince s'intercale entre le milieu multiplicateur et le réflecteur est traité également, d'une manière moins complète.

1. **Généralités.** — Un réacteur nucléaire est constitué par un milieu multiplicateur de neutrons entouré d'un réflecteur. Le réflecteur renvoie vers le milieu multiplicateur une partie des neutrons que celui-ci perd par sa surface. Le réflecteur permet ainsi de faire des économies sur les matériaux qui constituent le milieu multiplicateur, soit en quantité, soit en qualité [1]. La fonction, en définitive, du réflecteur est de rendre moins onéreuse la réalisation du régime critique.

Il est assez facile d'estimer l'efficacité du réflecteur dans le cas d'une pile sphérique ou d'une pile cylindrique munie d'un réflecteur latéral seulement. Le cas où le réflecteur couvre toute la surface du cylindre est plus délicat. Ce sont les conditions de continuité aux frontières des différents milieux qui sont embarrassantes. Il en est de même lorsque l'une des bases seulement du cylindre est libre de réflecteur. C'est de ce dernier problème que nous nous occuperons ici, pour fixer les idées.

Le réacteur (ou la pile) que nous envisageons est de la catégorie dite « à neutrons thermiques ». Le réflecteur doit être aussi diffusant que possible, très peu absorbant et disponible en quantités suffisantes : le graphite répond à ces exigences [2].

Pour traiter ce genre de problèmes, il faut jeter du lest du côté de la rigueur : on substitue au milieu multiplicateur, qui est généralement hétérogène, un milieu homogène fictif qui est défini de manière à avoir en moyenne les mêmes propriétés multiplicatrices et diffusantes que le milieu réel [3]. Ici nous raisonnerons uniquement sur le milieu fictif et ne nous occuperons pas de savoir comment les exigences relatives au milieu fictif se traduisent pour le milieu réel équivalent.

On utilise deux images inégalement précises de la réalité [4] : la première constitue la théorie à « un groupe » (il s'agit de groupe de vitesses). Dans la théorie à un groupe tous les neutrons sont supposés avoir la même vitesse : d'une part on attribue aux neutrons thermiques non pas le spectre de vitesses donné par la loi de répartition de Maxwell, mais une vitesse unique, qui est la vitesse la plus probable d'agitation thermique; d'autre part, on néglige le fait que les neutrons, avant de vieillir et de disparaître à des vitesses thermiques, ont une enfance, assez brève heureusement, pendant laquelle leur vitesse est beaucoup plus élevée. La définition du milieu fictif tient compte toutefois dans une certaine mesure des aventures du neutron pendant son enfance. Il reste ensuite à traiter un problème de diffusion thermique, avec multiplication ou absorption, dans deux milieux contigus. Les approximations déjà faites ne justifieraient pas des calculs ultérieurs rigoureux et c'est la théorie élémentaire de la diffusion qui est appliquée à ce problème.

La théorie à « deux groupes » est une amélioration modeste mais appréciable de la théorie précédente. Au lieu de ramener le spectre des vitesses à une valeur unique, la valeur la plus probable, on représente le spectre à l'aide de deux composantes discrètes : on distingue les neutrons thermiques et l'on

attribue à ceux-ci une vitesse unique, la même que ci-dessus, et les neutrons rapides, c'est le second groupe, ramenés eux aussi à une vitesse unique. La valeur exacte adoptée pour cette dernière vitesse n'a pas beaucoup d'importance en définitive, ce qui est heureux, car il serait difficile de la choisir.

Ici la complication de la géométrie nous imposera de nous limiter à la théorie à un groupe.

Le milieu multiplicateur fictif est caractérisé par son « laplacien » et sa section efficace totale pour les neutrons thermiques. Le laplacien d'un milieu multiplicateur est positif. C'est, pour le milieu multiplicateur, la grandeur fondamentale; l'art du constructeur est de lui donner une valeur aussi élevée que possible. Le milieu diffusant est caractérisé par sa longueur de diffusion et sa section efficace totale. Ce sont des données expérimentales. L'inverse du carré de la longueur de diffusion, changé de signe, est le laplacien du réflecteur. Le problème que nous nous posons est d'ajuster la valeur du laplacien multiplicateur et les dimensions de la pile de manière que celle-ci réalise le régime critique : la densité des neutrons est alors stationnaire. La solution du problème fournit en même temps la loi de répartition en densité des neutrons à l'intérieur de la pile, qui est utile pour de nombreuses applications.

La solution obtenue ne peut être utilisée qu'après quelques aménagements : en ce qui concerne le laplacien, une première amélioration serait fournie par la théorie à deux groupes; mais on se contente des renseignements qualitatifs fournis par la théorie à deux groupes dans le cas de géométries plus simples. En ce qui concerne la répartition des neutrons, après avoir tenu compte des indications de la théorie à deux groupes, il faut encore transposer les résultats, obtenus pour le milieu fictif homogène, au milieu réel, qui est généralement hétérogène.

Au delà d'une certaine épaisseur, les couches du réflecteur qui peuvent venir ensuite n'ont plus d'efficacité. Il faut donc limiter celui-ci à une épaisseur raisonnable. Ceci étant supposé réalisé, nous pouvons néanmoins nous permettre, pour notre objet, de le supposer d'une épaisseur infinie : il en résultera que la loi de répartition calculée des neutrons dans les dernières couches du réflecteur ne correspondra pas à la réalité. Une loi plus correcte pour cette région devra être demandée à une étude annexe.

Dans ce qui suit il nous sera commode d'envisager, à côté du régime critique, des régimes convergents ou divergents. Mais ces régimes ne nous intéresseront que comme intermédiaires analytiques et il n'est pas question d'en donner une description physiquement correcte : l'existence des neutrons retardés sera entièrement négligée puisque les délais ne jouent aucun rôle dans l'estimation du régime critique, autrement dit stationnaire.

2. **Formalisme.** — Nous appliquerons les équations élémentaires de la diffusion. Dans le milieu multiplicateur les neutrons se propagent et se multiplient suivant l'équation

$$3\frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma_t}(\Delta + K^2)n, \tag{1}$$

où Σ_t est la section efficace totale par centimètre cube du milieu multiplicateur et K^2 son laplacien. n est la densité des neutrons. De même, dans le réflecteur,

$$3\frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma_t}\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right)n. \tag{2}$$

Ici L est la longueur de diffusion. En général Σ_t n'a pas la même valeur pour les deux milieux.

A la surface de séparation de deux milieux il faut appliquer les équations de continuité

$$n = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\Sigma_t}n' = \text{const.}, \tag{3}$$

n' étant la dérivée de n suivant la normale à la surface de séparation. De plus, on se contente de l'approximation qui pose

$$n = 0$$

sur toute surface en contact avec l'air.

En toute rigueur, dans la théorie de la propagation des neutrons qui s'appuie sur l'équation de transfert, c'est la densité de probabilité dans l'espace et en vitesse qui est continue quand on passe d'un milieu au voisin. Dans la théorie élémentaire de la diffusion lorsque Σ_t est constant d'un milieu à l'autre, cela se traduit assez bien par la continuité de n et de ses dérivées spatiales. La situation est moins bonne quand Σ_t est variable, car il conviendrait d'écrire à la fois la continuité de n et de la dérivée de n pour toute direction, ce qui est incompatible, à moins que n ne varie pas en suivant le plan tangent à la surface de séparation : nos calculs seront d'autant meilleurs que les courants tangentiels seront faibles. Cette condition sera à la vérité assez mal remplie dans les « coins ». Un tel inconvénient n'existe pas pour le problème de la pile sphérique, parce que le courant y est radial.

Avec nos équations et conditions de continuité, l'opérateur O qui s'écrit

$$\frac{1}{\Sigma_t}(\Delta + K^2) \quad \text{dans la pile,}$$

$$\frac{1}{\Sigma_t}\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right) \quad \text{dans le réflecteur,}$$

est un opérateur self-adjoint. Cette propriété est précieuse, car elle entraîne que ses fonctions propres forment une suite orthogonale, d'où l'application de méthodes classiques.

Un régime exponentiel de la pile correspond à l'expression de n en fonction du temps

$$n = n_J \exp\left(\frac{t}{\tau_J}\right)$$

τ_J étant la constante de temps. La suite des valeurs de $g_J = \frac{3}{v\tau_J}$ constitue la suite des valeurs propres de l'opérateur O. Si la pile est légèrement surcritique, la première valeur propre est positive, c'est la valeur propre « fondamentale », les autres sont négatives. Si la pile est sous-critique, toutes les valeurs propres sont négatives. Enfin, si la pile est juste critique, la valeur propre fondamentale est nulle. En toute rigueur ajoutons qu'il peut bien arriver que la suite des valeurs propres soit continue, à l'exception toutefois à coup sûr de la valeur propre fondamentale, qui est toujours discrète.

Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique, il est aisé d'obtenir directement la solution critique : la solution se formule d'abord dans chaque milieu; il reste un coefficient arbitraire pour le réflecteur. Les deux conditions de continuité éliminent cet arbitraire et fournissent l'équation déterminante du laplacien. On travaille au fond uniquement le long du rayon vecteur. Dans le problème cylindrique les conditions de continuité interviennent de point en point. L'intuition ne permet pas d'essayer des solutions de structure simple.

3. **Traitement rigoureux d'un problème aux données approximatives.** — Il est impossible d'écrire simplement la répartition des neutrons pour le problème qui nous intéresse, mais nous pouvons y parvenir avec des données un peu différentes. C'est à partir du problème approximatif ainsi résolu que nous pourrons parvenir par approximation à la solution du problème réel.

Pour fixer les idées nous supposerons le cylindre multiplicateur vertical.

La figure représente la pile : la région (1) est la région multiplicatrice.

Nous diviserons le réflecteur en trois régions : (2), (3), (4).

Dans le problème réel ces trois régions sont de même nature et sont caractérisées par les mêmes paramètres :

Σ_2 pour la section efficace totale;

L pour la longueur de diffusion;

cependant que le milieu multiplicateur est caractérisé par une section efficace Σ_1 et par un laplacien K^2, qu'il s'agit de déterminer de manière que la pile soit critique.

Dans le problème approximatif on attribue aux régions (2) et (3) les propriétés du réflecteur réel, mais à la région (4) des propriétés qui seront définies ci-dessous, de manière à rendre aisée l'intégration du problème et qui en feront un milieu de moins bonne qualité que le réflecteur réel $L_4 < L$, $\Sigma_4 \sim \Sigma_2$.

Quant au milieu multiplicateur, on lui attribue la section efficace Σ_1 réelle et un certain laplacien K_0^2.

Un régime exponentiel du système approximatif vérifie donc les équations

$$\left.\begin{aligned}
(\Delta + K_0^2)n_1 &= \Sigma_1 g n_1,\\
(\Delta - L^{-2})n_2 &= \Sigma_2 g n_2,\\
(\Delta - L^{-2})n_3 &= \Sigma_2 g n_3,\\
(\Delta - L_4^{-2})n_4 &= \Sigma_4 g n_4,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où n_1, n_2, n_3, n_4, sont les expressions de n dans les régions respectives (1), (2), (3), (4).

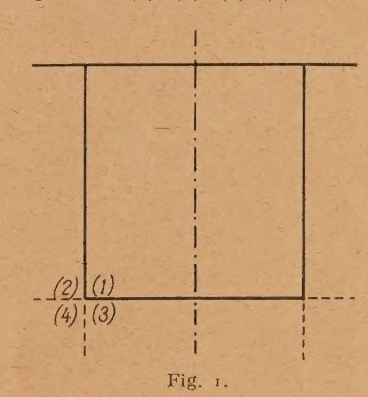


Fig. 1.

Une solution *continue* de ce système d'équations est [5]

$$\left.\begin{aligned}
n_1 &= \sin\alpha\frac{z}{h} J_0\left(x\frac{r}{R}\right),\\
n_2 &= \frac{J_0(x)}{K_0(y)}\sin\alpha\frac{z}{h} K_0\left(y\frac{r}{R}\right),\\
n_3 &= \sin\alpha \exp\left(-\beta\frac{z-h}{h}\right) J_0\left(x\frac{r}{R}\right),\\
n_4 &= \frac{J_0(x)}{K_0(y)}\sin\alpha \exp\left(-\beta\frac{z-h}{h}\right) K_0\left(y\frac{r}{R}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

R est le rayon de la pile, h sa hauteur. z et r sont les coordonnées cylindriques. L'origine de l'axe des z, qui est dirigé vers le bas, est au niveau supérieur de la pile. Les paramètres α, β, x, y restent à déterminer. Ils doivent d'abord vérifier les relations

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\alpha^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2} + K_0^2 &= \Sigma_1 g,\\
-\frac{\alpha^2}{h^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{1}{L^2} &= \Sigma_2 g,\\
\frac{\beta^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2} - \frac{1}{L^2} &= \Sigma_2 g,\\
\frac{\beta^2}{h^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{1}{L_4^2} &= \Sigma_4 g.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nous nous imposerons que g soit nul. La pile

« approximative » est juste critique, si toutefois le régime correspondant est bien le régime fondamental. On est pratiquement assuré qu'il en est bien ainsi si la solution représentée par n_1, n_2, n_3 et n_4 est partout positive. Ceci impose à α et à x de satisfaire aux inégalités

$$\alpha < \pi, \qquad x < 2,408. \tag{4}$$

Combinons maintenant les relations (3). Elles nous permettent d'établir une relation entre K_0 et L_4

$$\frac{1}{L_4^2} = \frac{2}{L^2} + K_0^2. \tag{5}$$

Comme nous l'avions annoncé, L_4 est plus petit que L.

Pour compléter le traitement de la pile approximative il convient d'écrire la relation de continuité entre les dérivées de n suivant la normale le long des surfaces de séparation. Ces conditions doivent être satisfaites point par point : le succès de la méthode provient de ce que la chose est possible moyennant un choix convenable de Σ_4.

Il vient

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\alpha \operatorname{cotg}\alpha, \\ \frac{y K_1(y)}{K_0(y)} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\frac{x J_1(x)}{J_0(x)}, \\ \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La dernière égalité détermine le Σ_4 de la pile approximative. Σ_2 et Σ_1 sont en général du même ordre de grandeur : Σ_4 est donc peu différent de Σ_2.

Nous savons déjà que L_4 est plus petit que L : le milieu (4) est donc d'une qualité inférieure à celle du milieu (2), (3), milieu réfléchissant de la pile réelle.

Revenons aux relations (3), que nous n'avons pas encore entièrement exploitées. Combinées avec les deux premières relations (6) elles nous permettront de préciser α, β, x, y et K_0^2.

Se donnant arbitrairement x on calculera y par

$$\frac{x J_1(x)}{J_0(x)} = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\frac{y K_1(y)}{K_0(y)}, \tag{7}$$

α par

$$\alpha = \sqrt{\frac{h^2}{R^2}y^2 - \frac{h^2}{L^2}}, \tag{8}$$

puis on déterminera x (et par suite α, β, y) par la condition

$$\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}\alpha \operatorname{cotg}\alpha\right)^2 = \frac{h^2}{R^2}x^2 + \frac{h^2}{L^2}. \tag{9}$$

Il faut conduire les essais de manière que α reste inférieur à π et x à 2,408.

Enfin K_0^2 se calcule par la formule

$$K_0^2 = \frac{x^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{h^2}. \tag{10}$$

4. Méthode de perturbation appliquée au calcul de la pile réelle. — La pile approximative diffère de la pile réelle seulement par la qualité du réflecteur, qui occupe une région secondaire parce que située dans les « coins ». On peut songer à calculer la solution du problème posé par la pile réelle par la méthode de perturbation, l'approximation « zéro » étant fournie par la solution relative à la pile approximative. Le problème est plus complexe qu'en mécanique ondulatoire, où la méthode de perturbation est familière, parce qu'il y a ici perturbation non seulement de l'opérateur, mais aussi des conditions de continuité.

Précisons en quoi consiste la perturbation. D'abord pour l'opérateur. O est l'opérateur de la pile approximative, $O + \delta O$ celui de la pile réelle. Cela donne le tableau suivant :

Région.	Pile approximative.	Pile réelle.
(1)	$O = \frac{1}{\Sigma_1}(\Delta + K_0^2)$	$O + \delta O = \frac{1}{\Sigma_1}(\Delta + K_0^2 + \delta K$
(4)	$O = \frac{1}{\Sigma_4}\left(\Delta - \frac{1}{L_4^2}\right)$	$O + \delta O = \frac{1}{\Sigma_2}\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right)$
(2), (3) ...	$O = \frac{1}{\Sigma_2}\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right)$	$O + \delta O = O.$

$K^2 = K_0^2 + \delta K^2$ est le laplacien cherché.

Au sujet des conditions de continuité, le seul changement concerne le passage entre (2 — 3) et (4) (n est la solution d'approximation zéro, $n + \delta n$ la solution du problème perturbé).

Pile approximative.	Pile réelle.	
$\frac{n'_{2-3}}{\Sigma_2} = \frac{n'_4}{\Sigma_4}$	$(n' + \delta n')_{2-3} = (n' + \delta n')_4.$	(1)

L'équation

$$O n = g n,$$

donne par variation, au second ordre près,

$$O\,\delta n + \delta O\, n = g\,\delta n + \delta g n.$$

Multiplions scalairement par la fonction n membre à membre

$$(n, O\,\delta n) + (n, \delta O n) = g(n, \delta n) + \delta g(n, n).$$

Mais

$$g(n, \delta n) = (O n, \delta n).$$

Ainsi

$$(n, \delta O\, n) - \delta g(n, n) = (O n, \delta n) - (n, O\,\delta n). \tag{3}$$

Exprimons le second membre à l'aide de quantiés connues. D'abord

$$(O n, \delta n) - (n, O\,\delta n) = (\Sigma^{-1}\Delta n, \delta n) - (n, \Sigma^{-1}\Delta\delta n), \tag{4}$$

à condition de prendre pour Σ la valeur convenable dans chaque région. On ramène ensuite le second membre à des intégrales de surface sur les surfaces de séparation des différents milieux. Pour la surface qui entoure le milieu (1) le résultat est nul, parce

que n et δn satisfont aux même relations de continuité. Reste la surface qui sépare (4) et (2-3). Il vient

$$\begin{aligned}(On,\ \delta n)-(n,\ O\,\delta n) &= \int \mathrm{d}S\left[\frac{1}{\Sigma_2}(\delta n.n'_{2-3}-n.\delta n'_{2-3})\right.\\ &\left.-\frac{1}{\Sigma_4}(\delta n.n'_4-n.\delta n'_4)\right]. \qquad (5)\end{aligned}$$

La normale est partout orientée de (2-3) vers (4). Une simplification évidente résulte de la relation (1). Il reste

$$\begin{aligned}(On,\ \delta n)-(n,\ O\,\delta n) &= \int \mathrm{d}S\left[-\frac{1}{\Sigma_2}\delta n'_{2-3}+\frac{1}{\Sigma_4}\delta n'_4\right]n. \qquad (6)\end{aligned}$$

Éliminons $\delta n'_{2-3}$ à l'aide de (1) et (2). Il vient, n étant continu,

$$(On,\ \delta n)-(n,\ O\,\delta n)=\int \mathrm{d}S\left(\frac{1}{\Sigma_4}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)(\delta n'_4+n'_4)n. \qquad (7)$$

Mais le terme en $\delta n'_4$ est du second ordre et doit être négligé. Il reste

$$(On,\ \delta n)-(n,\ O\,\delta n)=\left(\frac{1}{\Sigma_4}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)\int nn'_4\,\mathrm{d}S. \qquad (8)$$

Finalement, revenant à (3),

$$\delta g(n,\ n)=(n,\ \delta O\,n)+\left(\frac{1}{\Sigma_2}-\frac{1}{\Sigma_4}\right)\int nn'_4\,\mathrm{d}S. \qquad (9)$$

Évaluons quelques intégrales. Nous calculons $\int n^2\,\mathrm{d}V=(n,n)$ en évaluant la contribution des quatre régions :

région (1) :

$$\int n^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\pi R^2 h\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)[J_0(x)^2+J_1(x)^2],$$

ou, en désignant par V le volume du milieu multiplicateur

$$\frac{1}{2}V\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)(J_0^2+J_1^2);$$

région (2) :

$$\int n^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}V\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)\left[\left(\frac{K_1(y)}{K_0(y)}\right)^2-1\right]J_0(x)^2;$$

région (3) :

$$\int n^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}V\frac{\sin^2\alpha}{\beta}(J_0^2+J_1^2);$$

région (4) :

$$\int n^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}V\frac{\sin^2\alpha}{\beta}\left(\frac{K_1^2}{K_0^2}-1\right)J_0^2.$$

D'autre part évaluons $\int nn'_4\,\mathrm{d}S$ le long des inter-surfaces (2-4) et (3-4).

Rappelons que

$$n_4=\frac{J_0(x)}{K_0(y)}\sin\alpha\exp\left(-\beta\frac{z-h}{h}\right)K_0\left(y\frac{r}{R}\right).$$

Alors, le long de la surface (2-4) :

$$\left.\begin{aligned}n'_4 &= -\frac{\beta}{h}\frac{J_0(x)}{K_0(y)}\sin\alpha K_0\left(y\frac{r}{R}\right),\\ nn'_4 &= -\frac{\beta}{h}\left(\frac{J_0}{K_0}\sin\alpha\right)^2K_0^2\left(y\frac{R}{r}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Le long de la surface (3-4), de même :

$$nn'_4=-\frac{y}{R}(J_0\sin\alpha)^2\frac{K_1}{K_0}\exp-2\beta\frac{z-h}{h}. \qquad (11)$$

Alors, sur (2-4) :

$$\int nn'_4\,\mathrm{d}S=-\frac{V}{h^2}\beta\sin^2\alpha J_0^2\left(\frac{K_1^2}{K_0^2}-1\right), \qquad (12)$$

et sur (3-4) :

$$\int nn'_4\,\mathrm{d}S=-\frac{V}{R^2}\frac{y}{\beta}\sin^2\alpha J_0^2\frac{K_1}{K_0}. \qquad (13)$$

Nous sommes outillés pour calculer δg.

5. **Calcul final du laplacien.** — Nous déterminerons δK^2 de manière que la pile réelle à son tour soit critique. Donc $\delta g=0$.

La relation (4-9) devient

$$(n,\ \delta O\,n)+\left(\frac{1}{\Sigma_2}-\frac{1}{\Sigma_4}\right)\int nn'_4\,\mathrm{d}S=0. \qquad (1)$$

δO est nul dans les régions (2) et (3) et vaut

$$\frac{1}{\Sigma_1}\delta K^2 \quad \text{dans la région (1)},$$

$$\left(\frac{1}{\Sigma_2}-\frac{1}{\Sigma_4}\right)\Delta+\frac{1}{\Sigma_4 L_4^2}-\frac{1}{\Sigma_2 L^2} \quad \text{dans la région (4)}.$$

Mais dans cette région $\Delta n=L_4^{-2}n$.

Ainsi

$$\delta O.n=\frac{1}{\Sigma_1}\delta K^2 n \quad \text{dans la région (1)},$$

$$\delta O.n=\frac{1}{\Sigma_2}(L_4^{-2}-L^{-2})n \quad \text{dans la région (4)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}(n,\ \delta O\,n) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\Sigma_1}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)(J_0^2+J_1^2)\delta K^2\\ &+\frac{1}{2}\frac{1}{\Sigma_2}\left(K_0^2+\frac{1}{L^2}\right)\frac{\sin^2\alpha}{\beta}\left(\frac{K_1^2}{K_0^2}-1\right)J_0^2.\end{aligned}$$

Finalement la relation (1) devient

$$\begin{aligned}\delta K^2 = &-\frac{\sin^2\alpha}{\beta\left(1-\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)}\,\frac{1}{1+\dfrac{J_1^2}{J_0^2}}\,\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\\ &\times\left\{\left(K_0^2+\frac{1}{L^2}\right)\left(\frac{K_1^2}{K_0^2}-1\right)\right.\\ &\left.+2\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}-1\right)\left[\frac{\beta^2}{h^2}\left(\frac{K_1^2}{K_0^2}-1\right)+\frac{y}{R^2}\frac{K_1}{K_0}\right]\right\}.\end{aligned}$$

6. **Estimation de la répartition des neutrons.** — Cette répartition n'a pas besoin d'être connue avec une grande précision. Si l'on constate que δK^2 est petit, on pourra se contenter d'adopter pour la répartition des neutrons dans le milieu multiplicateur, la répartition calculée pour la pile approximative, c'est-à-dire

$$n = \sin\alpha \frac{z}{h} J_0\left(x \frac{r}{R}\right)$$

Il est intéressant ensuite pour les applications de calculer la densité moyenne (dans le milieu multiplicateur); il vient

$$V\bar{n} = \int_1 n \, \mathrm{d}V,$$

soit

$$\bar{n} = 2 \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha} \frac{J_1(x)}{x}.$$

On calcule aussi la densité moyenne le long de l'axe du milieu multiplicateur

$$h\bar{n}(O) = \int n(O) \, \mathrm{d}z,$$

soit

$$\bar{n}(O) = \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}.$$

On note que la densité maximum est par convention

$$n_m = 1.$$

7. **Exemple numérique.** — Les nombres du tableau suivant ont été calculés pour une pile de volume $V = 10\ \mathrm{m}^3$ et différentes valeurs du rapport $\frac{h}{2R}$. On a adopté pour L la valeur 0,4 m et pour le rapport $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$ la valeur 1. x, α, β, y sont des nombres sans dimensions. Le laplacien est exprimé en m^{-2}. Il a été exprimé avec un nombre excessif de décimales de manière à mettre en valeur la minime importance de la correction δK^2.

$\frac{h}{2R}$	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
x	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81
α	2,68	2,74	2,78	2,82	2,85
y	3,80	3,38	3,10	2,81	2,72
β	5,33	6,43	7,45	8,45	9,35
K_0^2	4,2753	4,0367	3,9623	3,9767	4,0294
δK^2	-0,0072	-0,0063	-0,0055	-0,0048	-0,0041
K^2	4,2680	4,0304	3,9568	3,9719	4,0253

Le rapport $\frac{h}{2R}$ optimum correspond au laplacien K^2 minimum : c'est la forme pour laquelle le milieu multiplicateur est le plus pauvre en qualités multiplicatrices. Cette valeur de $\frac{h}{2R}$ est 1,16. Le laplacien correspondant est 3,95.

La courbe ci-jointe représente la variation de K^2 en fonction de $\frac{h}{2R}$.

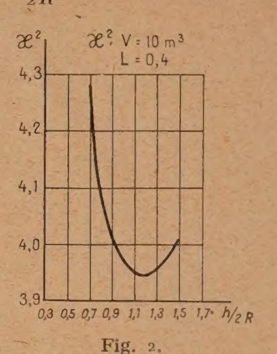


Fig. 2.

Voici d'ailleurs un petit tableau de valeurs optimums pour différentes valeurs du volume et de la longueur de diffusion. Dans chaque cas le premier nombre est le rapport hauteur sur diamètre et le second le laplacien (non corrigé) :

	9 m³.	10 m³.
0,4 m	1,16	1,16
	4,21	3,96
0,5 m	1,25	1,20
	3,95	3,72

En conséquence, une amélioration du graphite réflecteur qui ferait passer la longueur de diffusion du réflecteur de 0,4 à 0,5 m, permettrait, la qualité du milieu multiplicateur restant constante, d'économiser le dixième de ce dernier.

8. **Effet d'une paroi mince.** — Les calculs précédents n'envisagent pas la présence éventuelle d'une paroi mince, modérément absorbante, entre le multiplicateur et le réflecteur. Dans ce cas le problème est sensiblement plus difficile. Nous pouvons toutefois le résoudre par une méthode analogue à celle des premiers paragraphes, mais avec un achèvement moindre. Nous introduirons encore une pile

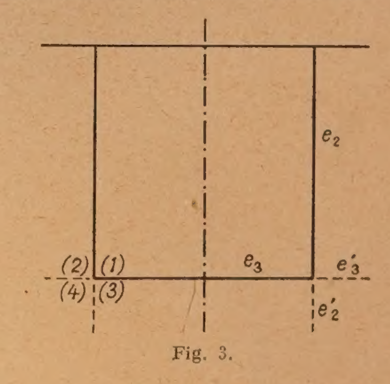


Fig. 3.

approximative, mais, compte tenu de l'expérience apportée par les précédents calculs numériques, nous admettrons que la pile approximative représente suffisamment bien la pile réelle pour qu'il ne soit pas nécessaire de procéder à un calcul de perturbation qui serait sans doute embarrassant en raison de la non-hermiticité des problèmes rencontrés maintenant.

Dans la pile approximative la paroi est prolongée par deux feuilles de même nature, l'une d'épaisseur e'_2 prolongeant la virole d'épaisseur e_2, l'autre horizontale d'épaisseur e'_3 prolongeant le fond d'épaisseur e_3.

e'_2 sépare la région (3) et la région (4). e'_3 sépare la région (2) et la région (4). Nous allons préciser les épaisseurs à adopter.

Les conditions de continuité sont, pour les densités, la continuité pure et simple. Pour le flux elles sont les suivantes (formules de continuité à travers une lame mince) :

à la limite (1-2) :

$$n'_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} n'_1 + e_2 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{n_1}{L_a^2};$$

à la limite (1-3) :

$$n'_3 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} n'_1 + e_3 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{n_1}{L_a^2};$$

à la limite (2-4) :

$$n'_4 = \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} n'_2 + e'_3 \frac{\Sigma_4}{\Sigma_a} \frac{n_2}{L_a^2};$$

à la limite (3-4) :

$$n'_4 = \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} n'_3 + e'_2 \frac{\Sigma_4}{\Sigma_a} \frac{n_3}{L_a^2}.$$

Σ_a est la section efficace totale du matériau de la paroi, L_a est la longueur de diffusion. On s'arrange pour que les deux dernières conditions s'identifient respectivement aux deux premières, ce qui impose, comme dans le problème précédent,

$$\frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1},$$

et pour les épaisseurs des feuilles postiches :

$$e'_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_4} e_2, \qquad e'_3 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_4} e_3,$$

ou, aussi bien :

$$e'_2 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} e_2, \qquad e'_3 = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} e_3.$$

On voit que dans la pile approximative, par suite de la présence des feuilles postiches, les « coins » sont encore plus abîmés que dans le problème précédent. On continue à prendre pour la région (4) une longueur de diffusion fictive L_4 telle que

$$\frac{1}{L_4^2} = \frac{2}{L^2} + K_0^2.$$

Moyennant les modifications adoptées pour la pile, on peut écrire une solution simple :

$$n_1 = \sin\alpha \frac{z}{h} J_0\left(x \frac{r}{R}\right),$$

$$n_2 = \frac{J_0(x)}{K_0(y)} \sin\alpha \frac{z}{h} K_0\left(y \frac{r}{R}\right),$$

$$n_3 = \sin\alpha \exp - \beta \frac{z-k}{h} J_0\left(x \frac{r}{R}\right),$$

$$n_4 = \frac{J_0(x)}{K_0(y)} \sin\alpha \exp - \beta \frac{z-h}{h} K_0\left(y \frac{r}{R}\right),$$

avec

$$\left.\begin{aligned} K_0^2 &= \frac{x^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{R^2}, \\ \frac{1}{L^2} &= \frac{y^2}{R^2} - \frac{\alpha^2}{h^2} = \frac{\beta^2}{h^2} - \frac{x^2}{R^2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

A quoi il faut ajouter les conditions imposées par les relations de continuités relatives aux flux :

$$\left.\begin{aligned} \frac{y K_1(y)}{K_0(y)} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \frac{x J_1(x)}{J_0(x)} - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{e_2 R}{L_a^2}, \\ \beta &= -\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \alpha \operatorname{cotg} \alpha - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_a} \frac{e_3 h}{L_a^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

A l'aide de la deuxième équation (1) et des équations (2) on détermine par tâtonnements x, y, α, β. Il faut faire attention que les termes en e_2 et e_3 ne doivent pas être considérés comme des infiniments petits. Puis on calcule le laplacien de la pile approximative, K_0^2. On peut admettre que le laplacien de la pile réelle en diffère à peu près de la même manière que dans le problème sans paroi, l'excès du laplacien de la pile étant toutefois sans doute un peu plus élevé ici.

Manuscrit reçu le 25 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Perrin F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, 1394.
[2] Smyth H. D. — Atomic Energy, U. S. A., 1945.
[3] Wigner E. P. — The Science and Engineering of Nuclear Power, Cambridge, U. S. A., 1947, I, 155.
[4] Soodak H. et Campbell E. C. — Elementary Pile Theory, New-York et Londres, 1950, p. 51.
[5] J_0, J_1, K_0, K_1 sont des fonctions de Bessel. Consulter : Watson. — Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1944.

MESURE DE LA TEMPÉRATURE DES NEUTRONS DANS LE RÉFLECTEUR D'UNE PILE A EAU LOURDE

Par A. ERTAUD et R. BEAUGÉ
Commissariat à l'Énergie atomique.

Sommaire. — On détermine la température des neutrons dans le réflecteur de la pile de Châtillon en mesurant la transmission d'une couche d'absorbeurs $\frac{1}{v}$. Le spectre des neutrons est supposé maxwellien. On détermine l'énergie à partir de laquelle on peut approximativement situer le début de la queue $\frac{1}{E}$ du spectre.

Cette température a été mesurée sur un rayon du réflecteur et à la sortie d'un canal radial débouché.

Introduction. — Nous avons déterminé la température des neutrons en différents points du réflecteur de la pile de Châtillon par une méthode de transmission analogue à celle utilisée par G. M. Branch [1].

Cette méthode est basée sur l'hypothèse d'une distribution maxwellienne en énergie des neutrons dans un diffuseur isotrope. Nous l'avons complétée par la détermination de l'énergie à partir de laquelle on peut approximativement remplacer la distribution maxwellienne par une distribution de ralentissement en $\frac{1}{E}$. Elle ne donne pas une détermination précise du spectre car la distribution n'est pas exactement une maxwellienne suivie d'une queue en $\frac{1}{E}$. Elle permet cependant de se faire une idée de la distribution d'énergie des neutrons dans le réflecteur.

Principe de la méthode. — Si l'on dispose d'un absorbeur en $\frac{1}{v}$ et d'un détecteur en $\frac{1}{v}$, on peut déterminer la vitesse la plus probable de la distribution des neutrons par les mesures suivantes :

1° activité d'un détecteur seul;
2° activité d'un détecteur placé entre deux plaques d'absorbeurs.

(En admettant la diffusion isotrope et le spectre des neutrons maxwellien).

Considérons un détecteur placé dans un milieu diffuseur dans lequel existe une densité de neutrons n dont la distribution en énergie est maxwellienne. Si ce détecteur est assez étendu [1], mince et en $\frac{1}{v}$ le nombre de noyaux A_0 transformés par unité de surface de détecteur et par unité de temps est donné par la formule

$$A_0 = nS\delta, \tag{1}$$

dans laquelle n est la densité des neutrons, $\frac{S}{v}$ la section de capture par centimètre cube et δ l'épaisseur du détecteur. Plaçons des deux côtés du détecteur un absorbeur en $\frac{1}{v}$ et caractérisons cet absorbeur par une vitesse d'absorption v_a définie de la façon suivante. Si I_0 est l'intensité d'un flux monocinétique de neutrons parallèle à la vitesse v et perpendiculaire à l'absorbeur et si I est le flux transmis à travers l'écran absorbant, on a

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\frac{v_a}{v_0}\right), \tag{2}$$

v_a est fonction de la section efficace et de l'épaisseur de l'absorbeur.

On peut alors calculer facilement le nombre de noyaux A du détecteur transformé par unité de temps et de surface si le détecteur est placé derrière cet absorbeur. Le rapport de transmission $\frac{A}{A_0}$ est donné par la formule

$$\frac{A}{A_0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} \int_1^\infty e^{-\frac{v_a u}{v_0 x}} \frac{du}{u^2} dx, \tag{3}$$

dans laquelle on a posé

$$v = v_0 x \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

φ étant l'angle d'incidence avec la normale au détecteur caractérisant les neutrons d'espèce φ. Le rapport $\frac{A}{A_0}$ des activités du détecteur nu et placé entre deux plaques absorbantes est donc lié à la vitesse la plus probable par l'équation (3).

[1] Théoriquement d'étendue infinie.

On pose en général :

$$E_2\left(\frac{v_a}{v_0 x}\right) = \int_1^\infty e^{-\frac{v_a u}{v_0 x}} \frac{du}{u^2} dx \qquad (4)$$

[fonction tabulée par G. Placzek (Rapport canadien M.T. 1)].

D'où

$$\frac{A}{A_0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} E_2\left(\frac{v_a}{v_0 x}\right) dx. \qquad (5)$$

Dans cette équation v_a est la vitesse d'absorption de l'absorbeur, v_0 la vitesse la plus probable cherchée et $\frac{A}{A_0}$ le rapport de transmission. Pour trouver v_0 il suffit donc de résoudre l'équation (5).

En fait le calcul précédent suppose que la densité des neutrons reste la même avant et après l'introduction de l'absorbeur. Pour réaliser ces conditions nous avons irradié le détecteur placé extérieurement contre l'absorbeur. Dans ces conditions on voit que le rapport des activités du détecteur placé entre les absorbeurs et placé entre les plaques absorbantes est donné par

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} E_2\left(\frac{v_a}{v_0 x}\right) dx}{\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} E_2\left(\frac{2 v_a}{v_0 x}\right) dx}. \qquad (6)$$

Les intégrales qui figurent dans cette équation ne peuvent être résolues directement, nous avons utilisé l'intégration graphique faite par G. M. Branch (*loc. cit.*) et nous en avons déduit la courbe traduisant l'équation (6).

L'introduction de l'absorbeur produit une altération dans la distribution angulaire des neutrons incidents.

Si les feuilles employées sont assez minces, l'erreur due à la variation de distribution angulaire est faible et a été négligée.

Détermination de v_a. — Nous avons utilisé des écrans de bore en admettant une section efficace de 703 barns pour des neutrons de 2 200 m : s [4].

D'après la courbe donnant $\frac{v_0}{v_a}$ en fonction de $\frac{A_1}{A_2}$ on voit que l'on a intérêt à ce que $\frac{v_0}{v_a}$ soit compris entre 1 et 8 et que l'on peut prendre v_a autour de 1 000 m : s. Ceci conduit à réaliser des absorbeurs d'environ 11,5 mg : cm². En fait nous avons opéré sur des absorbeurs de 12,4 mg : cm² ce qui nous donne $v_a = 1\,070$ m : s et $v_a^2 = 1{,}14 \cdot 10^6$.

Mode opératoire. — On irradie un rectangle de 55 × 65 mm dont on prélève pour la mesure un petit carré 11 × 13 mm au centre. En pratique, on a utilisé 25 détecteurs de manganèse collés à côté les uns des autres sur une feuille de cellophane et l'on a mesuré l'activité du détecteur central. La figure 1 montre l'ensemble de ces détecteurs, ainsi que la position du détecteur témoin [1].

Les absorbeurs sont constitués par un empilement de huit feuilles de papier filtre imbibé d'une solution filtrée de borax.

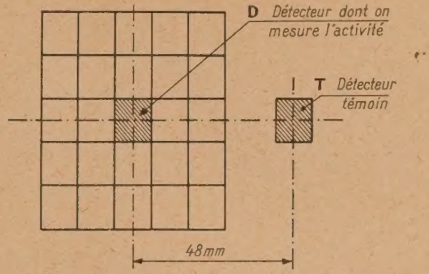


Fig. 1. — Disposition des détecteurs pour la mesure.

Ce paquet de huit feuilles était enfermé dans un étui d'aluminium de 1/100e de millimètre d'épaisseur. Pour tenir compte du papier et de l'aluminium un blanc était fait pour chaque irradiation. Chaque irradiation est complétée par une mesure d'effet cadmium.

Récapitulation des opérations à effectuer. — Pour déterminer la vitesse la plus probable des

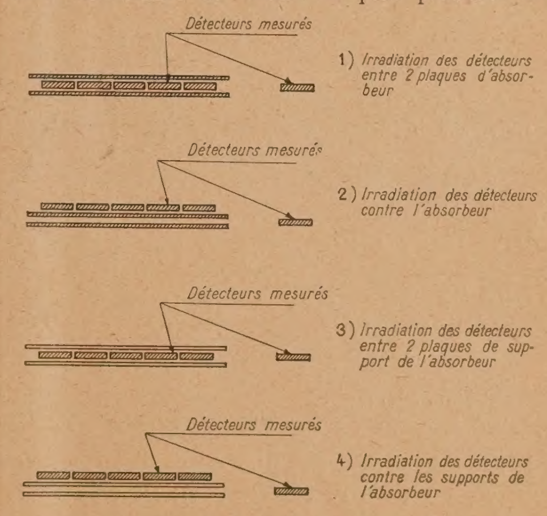


Fig. 2. — Résumé des opérations à effectuer.

Erratum. — Pour chaque opération, le détecteur mesuré de la série de cinq est celui du milieu et non le 4e, indiqué par la flèche.

[1] Le détecteur de manganèse employé a les caractéristiques suivantes :

Alliage de manganèse à 10 pour 100 de nickel;
Dimensions 11 × 13 mm;
Poids : 200 mg;
Épaisseur : 0,18 mm; soit 0,135 g : cm² dont 0,121 g : cm² de manganèse.

Cet alliage mis au point par M. Kowarski est actuellement en vente chez Johnson et Matthey (Londres).

neutrons dans une région donnée, il est donc nécessaire de procéder aux opérations suivantes :

1° Irradiation des détecteurs placés contre deux plaques de l'absorbeur.

2° Irradiation du détecteur placé entre les deux plaques d'absorbeurs (à l'extérieur).

3° et 4° Même irradiation que 1° et 2° en remplaçant l'absorbeur par un blanc (support d'absorbeur : papier filtre et étui d'aluminium).

5° et 6° Mêmes mesures avec plaque de cadmium entre détecteurs et absorbeurs (épaisseur du cadmium, 0,7 mm).

La figure 2 résume ces opérations, soit au total 16 mesures de détecteurs et huit irradiations pour la détermination de la vitesse la plus probable des neutrons en un point du réflecteur.

Exemple d'une mesure. — Dans chacune des opérations précédentes, nous appelons « mesures brutes » le rapport de l'activité du détecteur central au détecteur témoin mesuré avec le même compteur.

Le tableau suivant résume les résultats d'une opération de détermination de la température :

TABLEAU I.

	Moyenne des mesures brutes.	Déduction de l'effet cadmium.	$\frac{A_1}{A_2}$ (Résultat).
1. Détecteurs placés entre les deux absorbeurs.	0,350	0,345	0,615
2. Détecteur contre absorbeur	0,567	0,562	
3. Détecteur entre les deux blancs	0,962	0,956	0,985
4. Détecteur contre les blancs	0,977	0,971	
5. Détecteur entouré de cadmium entre les deux absorbeurs	0,005	–	–
6. Détecteur entouré de cadmium et entre les deux blancs	0,006	–	–

Si l'absorbeur était constitué uniquement de bore, dont on a calculé v_a [équat. (10)] on trouverait, partant de $\frac{A_1}{A_2} = 0{,}615$:

$$\frac{v_0}{v_a} = 2{,}3, \qquad \text{d'où} \qquad v_0 = 2\,460 \text{ m : s.}$$

En réalité l'effet d'absorption du blanc s'ajoute à celui du bore. On peut calculer approximativement la vitesse d'absorption du blanc en admettant le v_0 précédent.

Dans ce cas la mesure donne $\frac{A_1}{A_2} = 0{,}985$ où on déduit $\frac{v_0}{v_a} = 25$ et $v_a = 100$ m : s. On remplacera donc 1070 par 1 170 m : s, d'où $v_0 = 2\,680$ m : s.

En recommençant la correction à partir de cette vitesse on trouve $(v_a)_{\text{blanc}} = 110$ d'où $(v_a)_{\text{total}} = 1180$ et $v_0 = 2\,710$).

Un troisième essai donne le même résultat, d'où

$$v_0^2 = 7{,}7 \cdot 10^6 \qquad \text{et} \qquad T = 450 \text{ °K}, \qquad E = 0{,}039.$$

Détermination de l'énergie à partir de laquelle commence la queue de distribution. — Plusieurs auteurs ont montré que la distribution en énergie des neutrons épicadmiques était de la forme $\frac{1}{E}$ [2, 3]. En particulier W. Sturm [2] a déterminé le spectre des neutrons sortant d'un trou latéral de la pile à eau lourde d'Argonne à l'aide d'un spectromètre à cristal (LiF). On constate sur la courbe relevée par cet auteur l'existence d'une queue importante en $\frac{1}{E}$ à partir d'environ 0,2 eV et d'autre part cette même courbe montre que la distribution en énergie suit une loi de Maxwell jusqu'à 0,2 eV et une loi en $\frac{1}{E}$ sensiblement à partir de cette énergie.

Pour déterminer l'énergie à partir de laquelle on peut approximativement situer le début de la queue de distribution nous avons supposé qu'on pouvait décomposer le spectre des neutrons en deux parties.

Une partie principale dont les énergies se répartissent suivant une loi de Maxwell.

Une partie secondaire dont le flux suit une loi en $\frac{1}{E}$.

Si l'on admet les hypothèses précédentes, et si E_0 est l'énergie à partir de laquelle commence la distribution en $\frac{1}{E}$, on peut écrire sous forme d'intégrales l'effet des neutrons sur le détecteur suivant que ce détecteur sera ou non placé sous cadmium. Le tableau suivant donne ces intégrales à une constante commune près :

TABLEAU II.

Effet des neutrons d'énergie variant de :	
zéro à E_0 sur un détecteur sous cadmium (E_1)	$\int_0^{E_0} E\, e^{-\frac{E}{E_M}} e^{-N\sigma_{cd}(E)} \sigma(E)\, dE$
E_0 à E_1 sur un détecteur sous cadmium (E_2)	$E_0^2\, e^{-\frac{E_0}{E_M}} \int_{E_0}^{E_1} \sigma(E)\, e^{-N\sigma_{cd}(E)} \frac{dE}{E}$
zéro à E_0 sur un détecteur nu (E_3)	$\int_0^{E^0} E\, e^{-\frac{E}{E_M}} \sigma(E)\, dE$
E_0 à E sur un détecteur nu (E_4)	$E_0^2\, e^{-\frac{E_0}{E_M}} \int_{E_0}^{E_1} \sigma(E) \frac{dE}{E}$

Dans ce tableau :

E est l'énergie des neutrons;

E_M l'énergie correspondante à la vitesse la plus probable dans la répartition maxwellienne;

N le nombre de noyaux de cadmium par centimètre carré;

$\sigma_{Cd}(E)$ la section de capture du cadmium en fonction de l'énergie des neutrons;

$\sigma(E)$ la section de capture du manganèse en fonction de l'énergie des neutrons;

E_0 l'énergie à partir de laquelle la distribution de Maxwell est remplacée par une distribution en $\frac{1}{E}$;

E_1 l'énergie maximum des neutrons dans la distribution en $\frac{1}{E}$.

L'effet cadmium mesuré est

$$\varepsilon = \frac{(E_1)-(E_2)}{(E_3)+(E_4)} \simeq \frac{(E_2)}{(E_3)+(E_4)}, \qquad (7)$$

E_1 étant complètement négligeable. L'intégrale E_3 se calcule directement (en l'étendant jusqu'à l'infini). Pour déterminer E_2 et E_4 nous avons utilisé les valeurs de capture intégrale épicadmiques données par S. P. Harris, C. O. Muelhause et G. E. Thomas [3]. Ces auteurs ont montré que la section intégrale épicadmique du manganèse se décompose en une section de résonances $\Sigma_a = 5$ barns et une section épicadmique $\Sigma_1 = 4{,}8$ barns.

La courbe de variation de la section efficace du cadmium utilisée est celle donnée par R. K. Adair [6]. Il suffit alors de résoudre (7) pour obtenir E_0 à partir de ε.

Le Tableau III donne les résultats définitifs.

Tableau III.

Repère des points mesurés dans le graphite réflecteur.	Effet cadmium brut (%).	E_0 (eV).	T (°K).	E_M (eV).
0 à 3 cm de la cuve...	1,70	0,44	580	0,05
1..................	0,80	0,42	500	0,043
2..................	0,30	0,41	450	0,039
3..................	0,15	0,39	410	0,035
4..................	0,12	0,38	380	0,033
5 (bord du réflecteur).	0,10	0,38	380	0,033

La figure 3 traduit graphiquement les résultats du Tableau III.

On constate que la température correspondant à la vitesse la plus probable de la distribution de Maxwell passe de 580 à 380° K (l'énergie correspondant à la vitesse la plus probable étant alors 0,033 eV).

Pour cette dernière température le spectre des neutrons est très sensiblement maxwellien et la queue en $\frac{1}{E}$ est négligeable.

Remarque. — Chaque mesure a été faite en plaçant les détecteurs perpendiculairement au rayon de la cuve puis suivant ce rayon. Aucune différence n'a été observée.

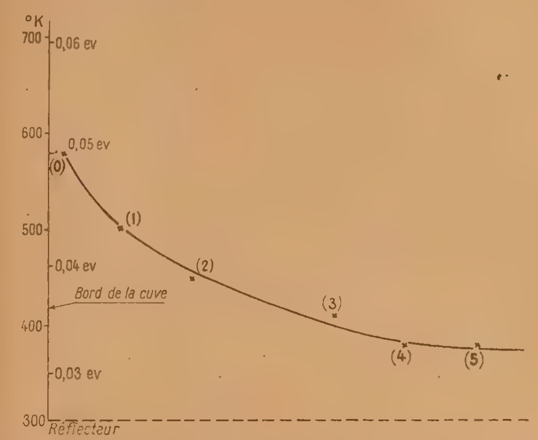


Fig. 3. — Variation de la « température » des neutrons en fonction de la distance au bord de la cuve. *Abscisse* : Distances comptées à partir du bord de la cuve en unités arbitraires. *Ordonnée* : Température absolue correspondant à la vitesse la plus probable.

Mesure de la « température » des neutrons à la sortie d'un canal débouché. — Cette mesure a été faite à la sortie du canal n° 7 radial. Dans ce cas le calcul exposé pages 3 et 4 ne s'applique plus tel quel car les neutrons sont canalisés par le trou à travers le béton, et l'hypothèse de la distribution isotrope n'est plus valable. Nous avons admis que tous les neutrons qui sortaient du trou arrivent perpendiculairement à la cible. Le calcul se simplifie et l'on est conduit à remplacer l'équation (5) par l'équation

$$\frac{A}{A_0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 \, e^{-\left(x^2 + \frac{v_a}{v_0 x}\right)} \, dx. \qquad (8)$$

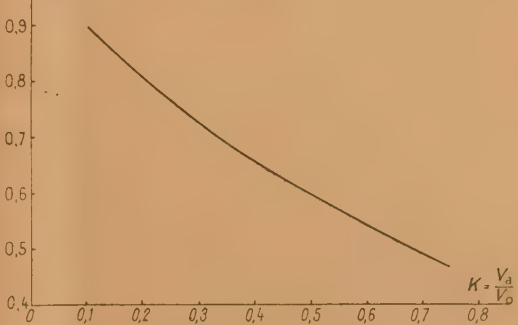


Fig. 4. — Variation de I en fonction de $\frac{v_a}{v_0} = K$.

La valeur de cette intégrale en fonction de $\frac{v_a}{v_0}$ est représentée sur la figure 4.

La mesure faite donne comme résultat :

$$\varepsilon = 4,2 \text{ pour } 100 \quad \text{et} \quad R = 0,645,$$
$$v_0 = 2\,590 \text{ m : sec}, \quad T = 410^\circ \text{ absolus},$$
$$E_M = 0,035 \text{ eV}, \quad E_0 = 0,18 \text{ eV}.$$

Nous pouvons comparer ce résultat avec celui obtenu par J. Sturm au spectromètre à cristal (*loc. cit.*). La courbe donnée par cet auteur montre que pour un canal débouché de la pile à eau lourde d'Argonne, la température de la distribution de Maxwell est de 400° K et que la queue en $\frac{1}{E}$ commence à environ 0,2 eV. Les résultats obtenus sur la pile de Châtillon sont dans ce cas sensiblement identiques à ceux obtenus sur la pile d'Argonne. Il est intéressant de constater que malgré la température relativement basse sortant d'un canal débouché la queue en $\frac{1}{E}$ est plus importante que dans les mesures précédentes.

Manuscrit reçu le 15 décembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Branch M. — Rapport déclassé américain M.DD.C. 747.
[2] Sturm W. J. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 11, 757.
[3] Harris S. P., Muehlhause C. O. et Thomas G. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 11.
[4] Fermi E., Marshall J. et Marshall L. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 193.
[5] Adair K. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 3, 249.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, MAI 1951, PAGE 584.

MESURES D'ABSORPTION DES NEUTRONS THERMIQUES PAR LA MODULATION D'UNE PILE

Par P. BENOIST, L. KOWARSKI et F. NETTER.
Commissariat à l'Énergie atomique.

Sommaire. — On module la densité des neutrons thermiques dans une pile en déplaçant un échantillon absorbant alternativement de l'extérieur vers le centre du milieu multiplicateur et vice-versa. Afin d'éviter de mesurer des signaux trop intenses on fait osciller, solidairement avec l'absorbant, un bouchon de graphite qui réfléchit les neutrons vers le centre de la pile et produit ainsi un signal réglable de signe contraire. L'application à la mesure de l'absorption de neutrons thermiques conduit, pour les sections efficaces, aux premiers résultats suivants, corrigés pour tenir compte des neutrons suprathermiques et exprimés en unités 10^{-24} cm² : σ(bore) = 710; σ(aluminium) = 0,219 ± 0,006; σ(lanthane) = 8,35 ± 0,10; σ(yttrium) = 1,25 ± 0,20.

I. — Modulation de la puissance d'une pile par déplacement d'une substance absorbante.

A. **Principe de la méthode.** — L'introduction périodique dans une pile d'un corps diffusant et absorbant les neutrons, provoque une variation suivant la même période de la densité neutronique en tous points de la pile [1, 2, 3]. La perturbation relative $\frac{\Delta N}{N}$ de la densité neutronique mesurée dans une région quelconque est indépendante de la puissance de fonctionnement de la pile; elle est, d'autre part, si la substance étudiée est purement absorbante, proportionnelle à sa section efficace d'absorption pour les neutrons de la pile, ce qui permet de mesurer ces sections efficaces en valeur relative.

L'opération s'effectue ici dans le canal axial vertical de la pile de Châtillon. L'échantillon, après être descendu rapidement dans la région du maximum de densité neutronique de ce canal, y séjourne pendant un temps nettement supérieur à la durée de descente, puis, après une remontée rapide, séjourne dans une région de très faible densité neutronique, les deux séjours étant en principe d'égale durée. Avec une nouvelle descente le cycle recommence.

Les fluctuations de la pile sont étudiées à l'aide d'une chambre d'ionisation à BF_3 située dans le réflecteur en graphite, qui permet de mesurer simultanément la composante continue N et la composante variable ΔN.

Les trois caractéristiques de la méthode sont :

1° Les deux positions extrêmes de l'échantillon

sont choisies de façon à réaliser le maximum de contraste quant à la densité neutronique.

2° La position de l'échantillon sur l'axe vertical est une fonction non sinusoïdale du temps; les deux arrêts sont séparés par des trajets très brefs, de façon à abréger le plus possible la transition d'une valeur de la réactivité de la pile à une autre.

3° L'appareil de mesure se trouve loin de l'origine de la perturbation. Il n'enregistre donc pas les effets purement locaux de celle-ci. Les phénomènes de déphasage étudiés [4, 5] dans le réflecteur de la pile n'apparaissent pas; seule la modulation transmise à travers l'ensemble de la pile est détectée.

B. **Réalisation expérimentale.** — 1° *Dispositif d'oscillation* (*fig.* 1). — L'échantillon est suspendu par une tige de dural et un fil d'acier à une plaquette d'acier qui, en fin de course, vient buter sur les armatures de deux électro-aimants distantes de 120 cm. La hauteur de suspension est ajustée de telle façon que l'échantillon se trouve placé au centre des densités neutroniques lorsque la plaquette est à l'arrêt en bas. Les déplacements de la plaquette sont commandés par un treuil, actionné par un moteur. Un mouvement d'horlogerie entraîne un groupe de quatre cames déclenchant des interrupteurs qui provoquent le démarrage et l'arrêt du moteur, changent son sens de rotation, et mettent en fonction les électro-aimants à l'instant de chaque arrêt afin d'éviter un rebondissement de la plaquette.

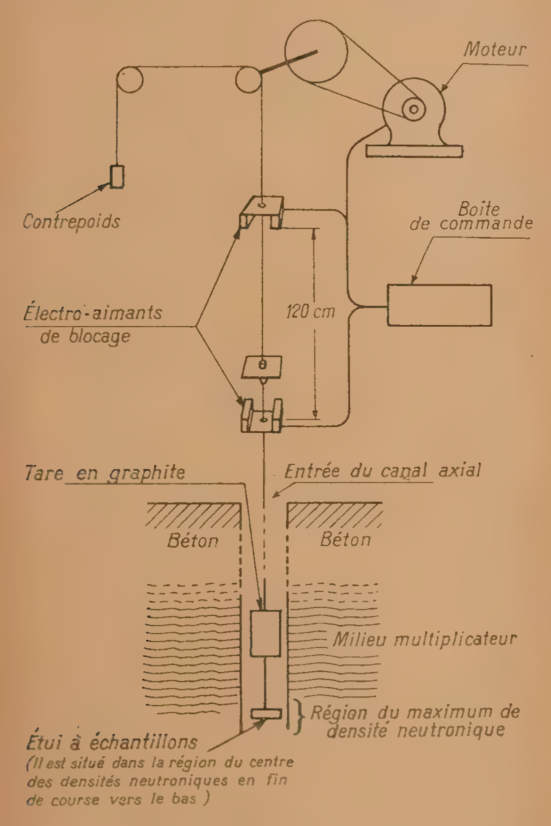


Fig. 1. — Dispositif d'oscillation.

La période du cycle est de 28,2 s (la régularité est assurée à mieux de 0,1 s près). Cette valeur de la période a été choisie de façon à se conformer aux caractéristiques du matériel récepteur disponible (*voir* ci-dessous). L'ordre de grandeur de quelques dizaines de secondes semble s'imposer, puisqu'il faut que cette période soit nettement supérieure à celle de la plupart des neutrons différés et, par ailleurs, aussi courte que possible pour que les fluctuations de la pile ne deviennent pas trop gênantes et que les mesures soient assez rapides.

La durée des trajets dépend du choix rigoureux du contrepoids équilibrant la plaque et la tige. On a sensiblement montée = descente = 1,4 s. Les stationnements sont voisins de 12,7 s. Il n'est d'ailleurs pas indispensable d'obtenir l'égalité stricte des deux durées d'arrêt : il suffit que le cycle soit toujours exactement reproduit.

2° *Réception du signal.* — Les fluctuations de courant enregistrées dans la chambre d'ionisation à BF_3 sont envoyées par l'intermédiaire d'un condensateur dans un galvanomètre résonant (dont la période nous a imposé la valeur exacte de la période du déplacement du corps absorbant). On mesure l'amplitude D (d'un extremum à l'autre) de déviation du spot du galvanomètre, prise en moyenne sur plusieurs cycles pendant que la pile reste très stable. La composante continue du courant G est mesurée à la sortie de la résistance de fuite de la chambre à l'aide d'un autre galvanomètre, afin de pouvoir noter au même instant les deux composantes. Mais avant chaque mesure en courant variable, un commutateur permet de mesurer la composante continue sur le même galvanomètre sensible, soit g cette valeur. On détermine ainsi à chaque fois le rapport $\left(\frac{G}{g}\right)$ initial. Finalement le signal S qui constitue le résultat est défini par

$$S = \left(\frac{D}{G}\right)_{\text{moyen}} \times \left(\frac{G}{g}\right)_{\text{initial}}.$$

L'ensemble du dispositif de réception permettant la mesure des deux composantes avec le même galvanomètre a été étudié et mis au point par MM. Ertaud, Raievski et Breton à l'occasion de leurs mesures par la méthode de déphasage [5].

3° *Marche d'une mesure.* — Les barres de contrôle sont réglées de telle façon que la moyenne de la réactivité de la pile prise sur de nombreux cycles soit égale à l'unité (réglage qui correspondrait à un coefficient de reproduction K différent de 1

en absence de l'échantillon absorbant ou diffusant). La puissance de fonctionnement, choisie pour des raisons de sécurité, est voisine de 300 W.

Les mesures relatives effectuées ici exigent en général la détermination d'un signal témoin S_0, du signal S produit après addition de l'échantillon étudié, et la comparaison de l'accroissement $A = (S - S_0)$ avec celui que donne un échantillon étalon (bore).

C. **Reproductibilité et additivité des signaux. Limitation imposée à ceux-ci.** — En examinant pendant plusieurs mois les signaux produits par divers échantillons, tant de graphite (essentiellement diffusant) que de bore, de manganèse, etc. (absorbants), nous avons pu conclure à la reproductibilité d'une mesure à mieux de 1 pour 100 près. La précision est limitée par les perturbations de la densité neutronique en cours de mesure, indépendantes de celle-ci et inhérentes au fonctionnement de la pile.

Si l'on n'introduit que des quantités d'absorbant ne dépassant pas, au total, une dizaine de millimètres carrés (rappelons, pour fixer les idées, que cette aire d'absorption correspond à 2,5 mg de bore), le signal A produit simultanément par plusieurs échantillons disposés de façon quelconque le long de la tige de suspension est égal à la somme des signaux que chacun d'eux produirait en absence de tous les autres, à condition de respecter rigoureusement l'emplacement sur la tige. En d'autres termes, le signal dû à un absorbant croît linéairement avec la quantité de celui-ci tant qu'elle reste petite. Le signal produit par le dispositif de suspension lui-même vient en déduction des quantités d'échantillons tolérables dans les limites de linéarité; il serait intéressant d'employer un dispositif de suspension extrêmement léger, mais la brutalité du mouvement et la rigidité nécessaire pour assurer une définition précise des hauteurs de suspension interdisent l'emploi de suspensions très minces et imposent ainsi un signal parasite irréductible. L'étui dans lequel on dépose l'échantillon crée, lui aussi, un signal parasite.

En faisant osciller une substance (graphite) beaucoup plus diffusante qu'absorbante, nous avons constaté que, dans certaines conditions géométriques, les signaux obtenus sont négatifs, c'est-à-dire font dévier le galvanomètre dans le sens opposé à celui déterminé par l'oscillation d'un absorbant. L'utilisation de ces signaux permet d'échapper à la limitation étroite de l'amplitude des signaux d'absorption.

II. — Procédé de la tare en graphite. Application à la mesure des sections efficaces d'absorption.

A. **Utilisation de signaux de diffusion comme tare.** — Nous avons étudié en détail le signal produit par un cylindre de graphite en fonction de la hauteur de suspension et de la longueur du cylindre; un tel bouchon diffusant suspendu au-dessus du centre de densité neutronique améliore la réactivité de la pile (il diminue les pertes par le canal axial ouvert).

Les valeurs du signal S donné par un cylindre de 665 g de graphite pour différentes hauteurs de suspension (repérées par la cote Z du centre de gravité du cylindre au-dessus du point d'attache de l'étui à échantillon) sont portées sur un graphique (*fig.* 2); le signal produit par la tige de

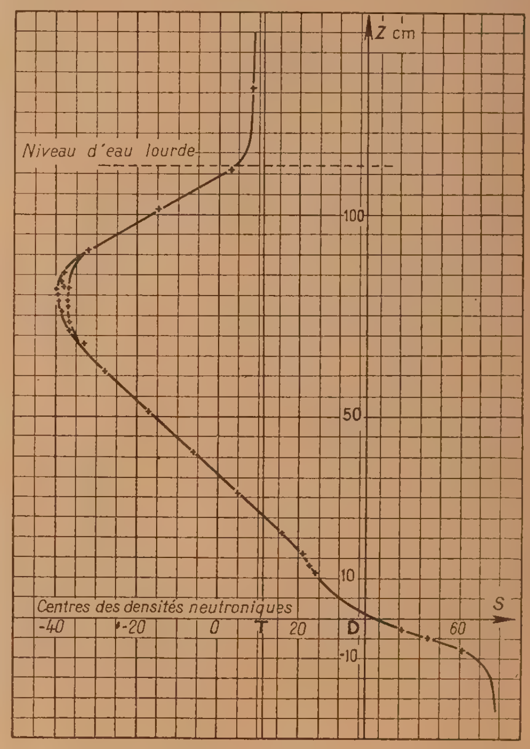


Fig. 2. — Signal donné par un cylindre de 665 g de graphite, repéré par la cote Z de son centre de gravité au-dessus du centre des densités neutroniques. (L'unité pour S correspond à un peu plus de 1 mm² de capture.)

suspension nue est figuré par l'abscisse du point T; celui que donnerait toute la masse absorbante liée au graphite (absorption propre du graphite et de son support en aluminium), si elle était concentrée au centre des densités neutroniques, est représenté par le point D, l'effet de cette masse absorbante étant d'ailleurs plus faible lorsqu'elle est localisée ailleurs qu'au centre.

On constate ainsi qu'une substance diffusante suspendue à une cote $Z > 0$ produit un effet opposé à celui d'une substance absorbante, et cet effet est suffisamment intense pour que le signal résultant puisse devenir « négatif ». L'extremum de l'action

diffusante se manifeste aux environs de $Z = 80$ cm (la cote exacte est difficile à fixer, car dans cette région la distribution des densités est particulièrement sensible aux fluctuations générales de la pile) alors que, pour cette hauteur de suspension, l'action d'un absorbant est moins grande qu'au centre. Entre cet extremum et le centre, une variation linéaire du signal de graphite en fonction de Z est mise en évidence (par exemple le cylindre de 665 g de graphite produit dans cette région de linéarité, suivant qu'il est suspendu à la cote Z ou $Z + 3{,}5$ cm, des signaux dont la différence est égale au signal que fournirait un absorbant de 4 mm² placé dans l'étui).

On vérifie qu'un signal de diffusion et un signal d'absorption produits simultanément s'ajoutent, compte tenu de leurs signes. Il est donc possible, grâce à une tare réflectrice en graphite, que l'on suspend à une hauteur convenable au-dessus des absorbants, de réduire à volonté les amplitudes résultantes.

Ce procédé permet, tout en restant dans le domaine des signaux linéaires (absorption < 10 mm²), de mesurer des absorbants dont l'aire de capture est sensiblement plus grande (jusqu'à environ 20 mm²); il suffit de choisir un signal témoin S_0 négatif à partir duquel l'accroissement dû à l'absorbant $A = S - S_0 = S + |S_0|$ peut atteindre une valeur double de celle admise précédemment.

On remarque d'autre part que le signal diffusant est, dans de larges limites, proportionnel à la longueur du cylindre de graphite considéré (pour une cote Z de son centre de gravité déterminée).

Ainsi, en réglant la hauteur de suspension et la longueur du graphite de façon à obtenir une action réflectrice intense, il devient possible d'introduire une suspension et des empaquetages correspondant à plusieurs centaines de millimètres carrés, s'il est nécessaire.

De plus, sans rien changer à la suspension et à la tare actuelles, on peut comparer des absorbants inconnus à des absorbants à peu près équivalents, étalonnés en bore; on mesurera ainsi des aires d'absorption allant jusqu'à 80 mm² environ (ou plus, en changeant la tare).

Pour effectuer une mesure avec un échantillon inconnu, nous commençons par un essai grossier fixant l'ordre de grandeur du signal. Nous en déduisons la position du bouchon tare assurant un signal S_0 négatif convenable (en adjoignant au besoin au système « à vide » un témoin absorbant étalon que l'on ôtera lorsqu'on disposera l'échantillon). Cette position doit être mécaniquement définie avec soin, car une modification en cours de mesure de 1 mm de hauteur de suspension, pour la tare que nous utilisons ordinairement, équivaudrait environ à une variation d'absorption de 0,12 mm² dans l'échantillon.

B. **Sensibilité.** — La méthode est caractérisée par l'existence d'un seuil de sensibilité. L'erreur relative sur une détermination diminue lorsqu'on augmente la masse de l'échantillon.

Pour un signal de diffusion constant (on obtient une constance très satisfaisante en définissant la masse de graphite à 0,5 g près), on distinguera aisément les signaux produits par deux absorbants qui diffèrent de 0,1 mm². En soignant la mesure on peut admettre, pour chaque signal, une erreur de 0,05 mm² de capture, soit déterminer une différence $(S - S_0)$ à $\pm 0{,}1$ mm² près. La précision est améliorée en mesurant plusieurs fois la même grandeur et en prenant la moyenne.

Il est essentiel, pour atteindre cette précision, que la pile soit très stable. Lorsqu'elle présente une dérive systématique, par exemple si elle se refroidit et que sa réactivité croît, il est possible d'obtenir une quasi-stabilité en réglant les barres de contrôle de façon à faire décroître très lentement la puissance; on aboutira alors à un minimum de puissance (avant que K ne revienne au-dessus de 1), durant lequel on effectuera la mesure. Dans ces conditions les fluctuations sur les valeurs de D notées à chaque cycle peuvent être très faibles (parfois moins de 1 pour 100) et il suffit de retenir un petit nombre de cycles. La durée des opérations est cependant assez grande parce que l'obtention d'une puissance quasi stationnaire, définie ci-dessus, demande du temps.

C. **Comparaison des signaux de diffusion et d'absorption au centre des densités.** — Il faut pouvoir corriger les mesures de sections efficaces d'absorption de l'effet dû à la diffusion et au ralentissement des neutrons. En étudiant les signaux donnés au centre par du graphite (dont le pouvoir ralentisseur est très supérieur à celui de toutes les substances, plus lourdes, envisagées par la suite) nous avons constaté que, pour un même nombre de millimètres carrés $\left(\text{et en admettant que, pour le graphite, } \frac{\sigma_{\text{diff}}}{\sigma_{\text{cap}}} \approx 1000\right) \left|\frac{\text{signal de diffusion}}{\text{signal d'absorption}}\right| \leq \frac{1}{2500}$. Le rapport varie appréciablement avec un petit déplacement de la hauteur de suspension; le signal dû à la diffusion peut changer de signe, mais sa valeur absolue reste faible.

D. **Application à la détermination de la teneur en impuretés absorbantes dans le graphite.** — L'étude des substances très faiblement absorbantes (C, Be, etc.) exige des échantillons volumineux qui occupent une hauteur appréciable du canal axial [1]. Les signaux de diffusion relativement importants qui sont alors produits sont très sensibles à la manière dont la masse de substance

[1] Le diamètre de ce canal est assez réduit (environ 5 cm).

est répartie le long de cette hauteur. Nous avons amorcé une étude spéciale à ce sujet. L'existence d'une zone de suspension où le rapport $\frac{\text{diffusion}}{\text{absorption}}$ reste très petit semble autoriser à envisager l'application de cette méthode à la détermination de la teneur en impuretés du graphite. Grâce à la sensibilité indiquée, il est possible de travailler sur des échantillons de graphite de l'ordre de 100 à 200 g.

E. **Mesure des sections efficaces d'absorption** (*cf.* [1, 2, 3, 6, 7, 8]). — 1° *Principe.* — On détermine, en faisant usage d'une tare convenable (*voir* plus haut), et en opérant dans les mêmes conditions géométriques et dans le même état de la pile, les accroissements de signaux A_X et A_B produits par une masse m_X de corps étudié et une masse m_B convenablement choisie de bore (m_B est choisie de façon à pouvoir mesurer A_B avec une bonne précision). On a alors

$$\frac{\sigma_X}{\sigma_B} = \frac{A_X}{A_B}\,\frac{m_B}{m_X}\,\frac{M_X}{M_B},$$

en désignant par M les masses atomiques.

Il est nécessaire de déterminer m_X par une pesée précise, et d'avoir des étalons de bore (dépôt de $B_4O_7Na_2$ sur papier filtre, avec témoin de papier sans dépôt) bien dosés.

2° *Corrections.* — La diffusion des noyaux X est en général négligeable, ainsi que celle des noyaux chimiquement associés (cas du lanthane où la substance est La_2O_3). Nous prenons soin cependant, puisque les mesures sont effectuées dans un flux de neutrons dont une part notable est suprathermique, de considérer l'effet des résonances de diffusion éventuelles d'après les résultats du laboratoire d'Argonne [9].

La diffusion et l'absorption possibles des noyaux chimiquement associés et des impuretés sont calculées en millimètres carrés de capture. On évalue la masse de bore qui donnerait le même signal que ces noyaux parasites et on la retranche de l'expression $m_B\frac{A_X}{A_B}$ déterminée expérimentalement.

Il est indispensable d'avoir les produits les plus purs possibles (aluminium à 99,99 pour 100, autres produits « Specpure » de Johnson-Matthey). Cependant certaines impuretés sont inévitables (Y_2O_3 « Specpure » contient 0,05 pour 100 de Er_2O_3 et 0,01 pour 100 de Ho_2O_3) et leur absorption est évaluée d'après les résultats publiés [8, 10].

La self-absorption est négligeable, car on ne dépasse pas une section de capture de plus de 1 mm² : cm².

3° *Correction de l'effet des neutrons suprathermiques.* — Le résultat de la mesure est une comparaison entre la capture des neutrons de pile par la substance X étudiée et la capture par le bore. Si la substance X suit la loi en $\frac{1}{v}$, σ_X définie ci-dessus est identique à la section efficace σ_{th} pour les neutrons monocinétiques de $v = 2\,200$ m : s (vitesse de référence usuelle pour le spectre thermique), dès que l'on prend pour σ_B la valeur relative aux mêmes neutrons; ceci reste vrai quel que soit, dans de larges limites, le spectre neutronique de la pile. L'égalité $\sigma_X = \sigma_{th}$ est en particulier valable avec une assez grande précision pour le lanthane et, dans une mesure plus limitée, pour l'yttrium (*voir* plus loin). Si X ne suit pas la loi en $\frac{1}{v}$, σ_X prend en général une valeur $\sigma_{pile} > \sigma_{th}$ [6] à cause de la contribution des neutrons de résonance. Dans le présent travail, nous nous bornerons à étudier les substances telles que l'aluminium, qui ne présentent pas de résonances accentuées, afin d'avoir un terme correctif petit sur lequel de fortes erreurs sont tolérables et afin de pouvoir négliger dans ce calcul la self-absorption liée à la résonance.

La correction utilise la notion de « rapport de cadmium », en admettant que la capture conduit uniquement à une activation. Rappelons que le rapport de cadmium R est le rapport de l'activité I_{tot} d'un échantillon irradié dans un certain champ neutronique à l'activité $I_{>Cd}$ du même échantillon inséré dans une enveloppe de cadmium et irradié dans le même champ.

Si nous nous bornons à la considération des substances dont les déviations de la loi en $\frac{1}{v}$ se situent *au-dessus* de l'énergie de coupure du cadmium, il est facile de voir que

$$I_{tot} - I_{>Cd} = K n \sigma_{th} \qquad \text{et} \qquad I_{tot} = K' n \sigma_{pile},$$

où n est le nombre de noyaux présents dans l'échantillon, K et K' sont des coefficients qui ne dépendent pas de la substance (en supposant les activités mesurées à saturation pendant une unité de temps) et où les σ sont définis comme ci-dessus.

On en déduit

$$\frac{I_{tot} - I_{>Cd}}{I_{tot}} = 1 - \frac{1}{R} = \frac{K n \sigma_{th}}{K' n \sigma_{pile}}$$

ou

$$\frac{\sigma_{pile}}{\sigma_{th}} = \frac{K}{K'}\,\frac{R}{R-1}.$$

Désignons par R_0 le rapport de cadmium pour un élément en $\frac{1}{v}$; il vient de même

$$1 = \frac{K}{K'}\,\frac{R_0}{R_0 - 1}.$$

Finalement,

$$\frac{\sigma_{pile}}{\sigma_{th}} = \frac{R(R_0 - 1)}{R_0(R-1)}.$$

La correction s'exprime donc par

$$\frac{\sigma_{pile}}{\sigma_{th}} - 1 = \frac{R_0 - R}{R_0(R-1)};$$

elle s'évalue à partir des mesures de rapport de cadmium dans la région de la pile où s'effectue l'oscillation, en faisant intervenir R_0, qui est caractéristique de la pile et R qui dépend à la fois de la pile et de la substance.

On montre d'ailleurs aisément que cette correction peut se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'un qui caractérise les propriétés de la substance à l'égard des neutrons de résonance, l'autre indépendant de la substance, mais déterminé par les propriétés du champ neutronique de la pile. Le premier de ces facteurs reste identique dans une autre pile; aussi les corrections peuvent-elles être calculées à partir de résultats acquis ailleurs, par exemple dans la pile d'Argonne [9], à condition de les affecter d'un coefficient indépendant de la substance envisagée.

Nous avons comparé les mesures de rapports de cadmium faites à Châtillon à celles d'Argonne, en particulier pour le manganèse et l'or. Pour les points d'opération respectifs, et les épaisseurs de cadmium utilisées, le rapport de la correction $\frac{\sigma_{\text{pile}}}{\sigma_{\text{th}}} - 1$ valable à Châtillon à celle applicable à Argonne est trouvé égal à 1,06. Nous pouvons donc évaluer cette correction pour de nombreuses substances à l'aide des résultats publiés [9], lorsque la détermination du rapport de cadmium n'a pas été effectuée à Châtillon (cas de l'yttrium) ou l'a été avec une moindre précision (cas de l'aluminium).

4° *Résultats.* — Les premiers résultats sont résumés ci-dessous, en admettant $\sigma_B = 710$ barns (un barn $= 10^{-24}$ cm²).

	Aluminium.	*Lanthane.*	*Yttrium.*
Capture (ordre de grandeur) de l'échantillon étudié...	3 mm²	5 mm²	0,5 mm²
Pureté (%)........	99,99	« Specpure » 99,99	« Specpure » 99,94
$\left(\frac{\sigma_X}{\sigma_B}\right)_{\text{pile}} \times 10^3$........	$0,311 \pm 0,008$	$11,75 \pm 0,15$	$1,75 \pm 0,25$
σ barns........	$0,221 \pm 0,006$ (σ_{pile}) $0,219 \pm 0,006$ (σ_{th})	$8,35 \pm 0,10$	$1,25 \pm 0,20$

Remarques. — *Aluminium :* La valeur indiquée concerne de l'aluminium pur à 99,99 pour 100. Pour un échantillon d'aluminium contenant quelques millièmes d'impuretés (Fe, V, Mn, Cu, etc.), nous obtenons $\sigma_{\text{th}} = 0,236 \pm 0,005$; l'écart s'interprète bien par l'absorption due aux impuretés.

Lanthane : Nous supposons que les déviations de la loi en $\frac{1}{v}$ peuvent être négligées (d'après les courbes de transmission publiées [11]).

Yttrium : La quantité de 600 mg de Y_2O_3 utilisée constituait le maximum disponible; la précision de la mesure en est affectée. Il n'apparaît donc pas nécessaire d'opérer une correction pour obtenir σ_{th} $\left(\text{car } \frac{\sigma_{\text{pile}}}{\sigma_{\text{th}}} - 1 = \frac{1}{140}\right)$.

Les mesures concernant Y sont intéressantes étant donné les contradictions des mesures précédentes, dues en partie à la difficulté d'obtenir cet élément libre de toute contamination par certaines terres rares très absorbantes. Pour le lanthane l'ordre de grandeur de la section efficace était déjà fixé par les mesures antérieures. Il se confirme ainsi que les noyaux à 50 ou 82 neutrons présentent, pour les neutrons *thermiques*, des sections notablement plus faibles que celles des noyaux situés un peu plus loin dans la suite naturelle [12].

Dans la présente étude, nous avons bénéficié du concours de nombreux travailleurs du Fort de Châtillon. Nous remercions plus particulièrement MM. Surdin, Le Meur, Weill et Dupuy pour l'étude et la construction du dispositif d'oscillation, M. Fisher qui a mis à notre disposition des substances très pures et Mlle Herczeg qui a confectionné nos étalons de bore, ainsi que M. Ertaud et son équipe des opérateurs de la pile de Châtillon.

Manuscrit reçu le 23 décembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Weinberg A. M. et Schweinler H. C. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 851.
[2] Hoover J. I., Jordan W. H., Moak C. D., Pardue L., Pomerance H., Strong J. D. et Wollan E. O. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 864.
[3] Langsdorf A. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1217.
[4] Raievski V. et Yvon J. — *C. R. Ac. Sc.*, 1950, **231**, 345-347.
[5] Ertaud, Raievski et Breton. — (A paraître au *J. Physique*).
[6] Harris S. P., Muehlhause C. O., Rasmussen S. Schroeder H. P. et Thomas G. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 3, 342.
[7] Littler D. J. — *Atomics*, 1950, **1**, 12, 189.
[8] Colmer F. C. W. et Littler D. J. — *Proc. Phys. Soc.*, 370 A, **63**, 10, 1175.
[9] Harris S. P., Muehlhause C. O. et Thomas G. E. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 1, 11.
[10] Ross M. et Story J. S. — *Rep. Prog. Phys.*, 1949, **12**, 291.
[11] Adair R. K. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 3.
[12] Kowarski L. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 477.

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE SUR DES COUCHES MULTIPLES HOMOGÈNES MINCES ET ÉPAISSES

Par ANTONIN VAŠIČEK,

Université technique Benes, à Brno (Tchécoslovaquie).

Sommaire. — Si l'on calcule la reflexion de la lumière sur du verre avec des couches homogènes multiples minces, on obtient des formules différentes selon que l'on considère les couches du haut en bas ou du bas en haut. La formule est la même dans les deux sens lorsqu'on étudie la réflexion sur du verre avec des couches homogènes épaisses, si l'on considère les lames épaisses comme un cas limite des lames multiples minces.

Dans un article publié dans ce périodique l'auteur décrit deux méthodes de calcul de la réflexion de la lumière sur le verre avec des couches multiples homogènes minces : la méthode de l'auteur qui consiste à calculer la réflexion de la lumière sur la première couche, puis à ajouter la seconde, etc. et la méthode de Rouard qui procède dans le sens inverse, c'est-à-dire en commençant les calculs par la dernière couche et en remontant à la première [1]. Ces deux méthodes conduisent à des formules dont la forme est un peu différente.

En faisant les calculs semblables pour les couches homogènes épaisses (c'est-à-dire les couches dont l'épaisseur est plus grande que la longueur d'onde de la lumière utilisée) les formules de calcul de la réflexion sont les mêmes si l'on effectue les calculs en commençant par la première couche ou en sens inverse. Dans le cas d'une couche homogène épaisse sur le verre, on considère deux milieux optiques avec deux pouvoirs réflecteurs

$$\rho' = r'^2, \qquad \rho'' = r''^2$$

et l'on obtient pour le pouvoir réflecteur résultant ρ_1 la formule bien connue

$$\rho_1 = \rho' + \frac{\rho''(1-\rho')^2}{1-\rho'\rho''} = \frac{\rho'+\rho''-2\rho'\rho''}{1-\rho'\rho''}. \quad (^1) \qquad (33)$$

En calculant le pouvoir réflecteur du verre supportant deux couches épaisses on a trois surfaces de séparation avec les pouvoirs réflecteurs suivants :

$$\rho' = r'^2, \qquad \rho'' = r''^2 \qquad \text{et} \qquad \rho''' = r'''^2.$$

On remplace le pouvoir réflecteur des deux premières surfaces par le pouvoir ρ_1 et l'on obtient pour le pouvoir réflecteur résultant ρ la formule suivante :

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho''' - 2\rho_1\rho'''}{1-\rho_1\rho'''}, \qquad (34)$$

D'après tout ce qui précède, il est clair qu'il est équivalent de considérer tout d'abord le pouvoir réflecteur des deux premières surfaces de séparation et de prendre ensuite la troisième surface ou inversement. Dans le cas des trois couches homogènes épaisses c'est-à-dire des quatre surfaces de séparation on peut combiner le pouvoir réflecteur des deux premières surfaces avec celui des deux dernières d'après la même formule.

En supposant que l'indice de réfraction du verre et les indices de réfraction des couches épaisses sont les mêmes pour toutes les composantes de la lumière blanche, c'est-à-dire pour les longueurs d'onde différentes, la dispersion n'est pas prise en considération; on obtient, il est vrai, en calculant l'amplitude de la lumière réfléchie sur les couches minces les valeurs différentes pour les différentes longueurs d'onde, parce que pour des longueurs d'onde différentes on a des différences de marche différentes.

La valeur moyenne du carré de l'amplitude pour différentes longueurs d'onde, c'est à dire pour les différentes composantes de la lumière blanche, est cependant la même, et cette valeur moyenne correspond au pouvoir réflecteur du verre supportant des couches homogènes multiples épaisses pour la lumière blanche. De cette manière on peut considérer les couches épaisses homogènes multiples comme le cas limite des couches minces homogènes multiples.

Montrons maintenant pourquoi on peut utiliser la même formule pour les couches multiples épaisses si l'on considère les surfaces de séparation de la première jusqu'à la dernière ou inversement et pourquoi ces formules sont de formes différentes si l'on considère des couches multiples minces en commençant par la couche supérieure d'après la méthode de l'auteur ou inversement d'après celle de Rouard. La réponse est évidente en calculant la valeur moyenne de l'intégrale :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a+m\cos u}{b+m\cos u}\,du = \frac{\sqrt{b^2-m^2}+a-b}{\sqrt{b^2-m^2}}, \\ &\text{où} \quad \frac{b+m}{b-m} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

(1) Les numéros des formules suivent ceux de l'article antérieur déjà cité.

En utilisant le résultat précédent avec la formule (18) ([1], p. 343), de l'article antérieur, la formule étant déduite d'après la méthode de l'auteur et en introduisant

$$r'^2 + r''^2 = a, \qquad 1 + r'^2 r''^2 = b, \qquad 2r'r'' = m, \qquad x_1 = u,$$

on obtient

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2 + r''^2 + 2r'r''\cos u}{1 + r'^2 r''^2 + 2r'r''\cos u}\,du$$
$$= \frac{r'^2 + r''^2 - 2r'^2 r''^2}{1 - r'^2 r''^2} = \frac{\rho' + \rho'' - 2\rho'\rho''}{1 - \rho'\rho''}, \qquad (36)$$

et de la même manière de la formule (25) ([1], p. 344) pour

$$x_1 + x_2 + \delta_1 + \varepsilon_1 = u,$$

on tire

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 + r'''^2 + 2r_1 r'''\cos u}{1 + r_1^2 r'''^2 + 2r_1 r'''\cos u}\,du$$
$$= \frac{r_1^2 + r'''^2 - 2r_1^2 r'''^2}{1 - r_1^2 r'''^2} = \frac{\rho_1 + \rho''' - 2\rho_1\rho'''}{1 - \rho_1\rho'''}, \qquad (37)$$

en accord avec les formules (33) et (34).

En utilisant les formules correspondantes d'après la méthode de Rouard on tire de la formule (5) ([1], p. 343) pour $k = 2$ $(x_2 = u)$:

$$\rho_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r''^2 + r'''^2 + 2r''r'''\cos u}{1 + r''^2 r'''^2 + 2r''r'''\cos u}\,du$$
$$= \frac{\rho'' + \rho''' - 2\rho''\rho'''}{1 - \rho''\rho'''} \qquad (38)$$

et de même pour la formule (14) ([1], p. 343), on a $(x_1 - \delta_2 = u)$:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2 + r_2^2 + 2r'r_2\cos u}{1 + r'^2 r_2^2 + 2r'r_2\cos u}\,du$$
$$= \frac{\rho' + \rho_2 - 2\rho'\rho_2}{1 - \rho'\rho_2}. \qquad (39)$$

Dans les deux cas on a obtenu la même formule pour la réflexion de la lumière par des verres supportant deux couches qui peut être considérée comme cas limite des formules un peu différentes pour les deux couches minces. Ce résultat est plus frappant en calculant la réflexion de la lumière par des verres contenant trois couches minces (quatre surfaces de séparation); dans ce cas on peut écrire schématiquement comme suit

$$\left.\begin{array}{l} r', r'' \to r_{\rm I}\,e^{i\delta_{\rm I}} = \dfrac{r' + r''\,e^{-ix_1}}{1 + r'r''\,e^{-ix_1}} \\[2ex] r''', r'''' \to r_{\rm II}\,e^{i\delta_{\rm II}} = \dfrac{r''' + r''''\,e^{-ix_3}}{1 + r'''r''''\,e^{-ix_3}} \end{array}\right\} \to r\,e^{i\delta}, \qquad (40)$$

où l'on écrit

$$r\,e^{i\delta} = \frac{r_{\rm I}\,e^{i\delta_{\rm I}} + r_{\rm II}\,e^{i\delta_{\rm II}}\,e^{-i(x_1+x_2+\varepsilon_{\rm I})}}{1 + r_{\rm I}\,e^{-i\delta_{\rm I}}\,r_{\rm II}\,e^{i\delta_{\rm II}}\,e^{-i(x_1+x_2+\varepsilon_{\rm I})}}$$
$$= \frac{r_{\rm I}\,e^{i\delta_{\rm I}} + r_{\rm II}\,e^{-i(x_1+x_2+\varepsilon_{\rm I}-\delta_{\rm II})}}{1 + r_{\rm I}r_{\rm II}\,e^{-i(x_1+x_2+\delta_{\rm I}+\varepsilon_{\rm I}-\delta_{\rm II})}}; \qquad (41)$$

en portant pour

$$r_{\rm I}\,e^{i\delta_{\rm I}}, \quad r_{\rm II}\,e^{i\delta_{\rm II}} \quad \text{et} \quad e^{i\varepsilon_{\rm I}} = \frac{1 + r'r''\,e^{-ix_1}}{1 + r'r''\,e^{+ix_1}},$$

on obtient la même formule que Crook dans son article, page 956, formule (4.5) [2]. Pour les amplitudes $r_{\rm I}$, $r_{\rm II}$ et r on obtient

$$r_{\rm I}^2 = \frac{r'^2 + r''^2 + 2r'r''\cos x_1}{1 + r'^2 r''^2 + 2r'r''\cos x_1}, \qquad (42)$$

$$r_{\rm II}^2 = \frac{r'''^2 + r''''^2 + 2r'''r''''\cos x_3}{1 + r'''^2 r''''^2 + 2r'''r''''\cos x_3}, \qquad (43)$$

$$r^2 = \frac{r_{\rm I}^2 + r_{\rm II}^2 + 2r_{\rm I}r_{\rm II}\cos(x_1 + x_2 + \delta_{\rm I} + \varepsilon_{\rm I} - \delta_{\rm II})}{1 + r_{\rm I}^2 r_{\rm II}^2 + 2r_{\rm I}r_{\rm II}\cos(x_1 + x_2 + \delta_{\rm I} + \varepsilon_{\rm I} - \delta_{\rm II})}. \qquad (44)$$

En calculant les valeurs moyennes des formules précédentes on obtient [à partir de la formule (42)] pour trois couches épaisses $(x_1 = u)$:

$$\rho_{\rm I} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2 + r''^2 + 2r'r''\cos u}{1 + r'^2 r''^2 + 2r'r''\cos u}\,du$$
$$= \frac{\rho' + \rho'' - 2\rho'\rho''}{1 - \rho'\rho''}, \qquad (45)$$

par la formule (43) $(x_3 = u)$:

$$\rho_{\rm II} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'''^2 + r''''^2 + 2r'''r''''\cos u}{1 + r'''^2 r''''^2 + 2r'''r''''\cos u}\,du$$
$$= \frac{\rho''' + \rho'''' - 2\rho'''\rho''''}{1 - \rho'''\rho''''}. \qquad (46)$$

et par la formule (44) $(x_1 + x_2 + \delta_{\rm I} + \varepsilon_{\rm I} - \delta_{\rm II} = u)$:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_{\rm I}^2 + r_{\rm II}^2 + 2r_{\rm I}r_{\rm II}\cos u}{1 + r_{\rm I}^2 r_{\rm II}^2 + 2r_{\rm I}r_{\rm II}\cos u}\,du$$
$$= \frac{\rho_{\rm I} + \rho_{\rm II} - 2\rho_{\rm I}\rho_{\rm II}}{1 - \rho_{\rm I}\rho_{\rm II}}. \qquad (47)$$

Dans les calculs du pouvoir réflecteur ρ des couches multiples épaisses nous considérons comme évident qu'on peut former des groupes arbitraires et utiliser la même formule pour ces groupes. La solution du cas des trois couches minces montre qu'on peut généraliser cette formation des groupes dans le cas des couches multiples minces. Dans cette généralisation il est nécessaire d'utiliser les formules correspondantes, c'est-à-dire celles de l'auteur, si l'on commence par la première couche, et celles de Rouard si l'on procède dans le sens inverse c'est-à-dire en commençant par la couche inférieure.

La réflexion de la lumière par des verres supportant les couches multiples minces représente un cas très intéressant de généralisation parce que celle-ci conduit à deux formes différentes des formules donnant la même valeur pour l'amplitude et la phase résultante.

L'auteur espère que ce problème est maintenant

suffisamment éclairci, surtout au point de vue de l'accord des théories de la réflexion de la lumière par des verres contenant des couches multiples homogènes épaisses et minces. Cet article est le complément du travail précédent publié dans ce même périodique.

Manuscrit reçu le 4 septembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Vašiček A. — *J. Physique*, 1950, **11**, 342.

[2] Crook A. W. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1948, **38**, 954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, MAI 1951, PAGE 592.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE CINÉTIQUE DES FLUIDES DE BORN ET GREEN AUX ENSEMBLES DE PARTICULES DE PLUSIEURS ESPÈCES DIFFÉRENTES

Par G. FOURNET.

Office national d'Études et de Recherches aéronautiques.

Sommaire. — La théorie de Born et Green s'applique au cas où toutes les particules composant le fluide sont identiques. Nous avons généralisé certains des résultats de cette théorie (propriété du fluide en équilibre) dans le cas où il existe plusieurs espèces différentes de particules.

Introduction. — Nous avons transformé [1] l'expression classique [2] de l'intensité du rayonnement X diffusé par un ensemble de particules identiques grâce à certains résultats de la théorie cinétique des fluides de Born et Green [3, 4, 5]. La nouvelle expression de l'intensité, où les effets du rapprochement des particules et de la nature des forces interparticulaires sont séparés, présente de nombreux avantages.

Dans le cas d'ensembles de particules de plusieurs espèces différentes, il est possible d'obtenir [6, 7] une expression du genre de celle de Zernicke et Prins pour l'intensité du rayonnement diffusé. Pour pouvoir transformer cette expression — ne faisant intervenir que les $n_{2,ij}$ (*voir* définition ci-dessous) — nous avons été conduits à étendre la théorie de Born et Green aux ensembles de particules de plusieurs espèces différentes. Nous nous sommes limités au seul calcul des $n_{2,ij}$.

Notations. — Nous emploierons des notations similaires à celles de Born et Green. Nous notons ainsi par

$$n_{h,A_1A_2\ldots A_i\ldots A_h}(t;\vec{x}^1,\vec{x}^2,\ldots,\vec{x}^i,\ldots,\vec{x}^h)\prod_{i=1}^{h}\mathrm{d}\vec{x}^i$$

la probabilité pour que h particules distinctes de nature $A_1\ldots A_i\ldots$ soient situées à l'extrémité des vecteurs $\vec{x}^1\ldots,\vec{x}^i\ldots$ dans les éléments de volume $\mathrm{d}\vec{x}^1\ldots,\mathrm{d}\vec{x}^i\ldots$ au temps t.

De même nous notons par

$$f_{h,A_1\ldots A_h}(t;\vec{x}^1,\ldots,\vec{x}^h,\vec{\xi}^1,\ldots,\vec{\xi}^h)\prod_{i=1}^{h}\mathrm{d}\vec{x}^i\,\mathrm{d}\vec{\xi}^i$$

la probabilité pour que les particules précédemment définies aient en même temps des vitesses comprises entre $\vec{\xi}^i$ et $\vec{\xi}^i+\mathrm{d}\vec{\xi}^i$.

Il existe évidemment des formules reliant ces différentes lois de probabilité. Par exemple, si nous considérons l'intégrale

$$\int n_{h+1,A_1A_2\ldots A_hA_{h+1}}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}$$

sa valeur est égale à la probabilité $n_{h,A_1\ldots A_h}(t,\vec{x})$ multipliée par le nombre de particules de nature A_{h+1} que l'on peut trouver dans les $N-h$ particules restantes, soit

$$\int n_{h+1,A_1\ldots A_hA_{h+1}}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}$$
$$=p_{A_{h+1}}^{N-h}(N-h)\,n_{h,A_1\ldots A_h}(t,\vec{x}),$$

$p_{A_{h+1}}^{N-h}$ désignant la probabilité pour qu'une particule des $N-h$ restantes soit de nature A_{h+1}. Remarquons que si h est petit devant N, la probabilité $p_{A_{h+1}}^{N-h}$ tend asymptotiquement, quelle que soit la composition des h, vers $p_{A_{h+1}}^{N}$, probabilité pour qu'une particule des N soit de nature A_{h+1}, probabilité que nous pouvons encore noter simplement par $p_{A_{h+1}}$,

Équation de continuité. — D'après les définitions mêmes des fonctions f_h et n_h, on doit avoir

$$\int^{h}\cdots\int f_h\left(t-\delta t,\, \vec{x}-\vec{\xi}\,\delta t,\, \vec{\xi}\right)\prod_{i=1}^{h}\mathrm{d}\vec{\xi}^i = n_h\left(t,\, \vec{x}\right),$$

les natures des h particules considérées étant évidemment les mêmes aux mêmes positions pour les fonctions f_h et n_h (pour abréger l'écriture nous n'avons pas porté les indices $A_1, \ldots, A_h$).

Grâce à cette remarque, la forme des équations de continuité dans la théorie généralisée est la même que précédemment :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial n_h}{\partial t}+\sum_{i=1}^{h}\frac{\partial}{\partial \vec{x}^i}\left(n_h\overline{\vec{\xi}^i}\right)=0,\\&\frac{\partial f_h}{\partial t}+\sum_{i=1}^{h}\frac{\partial f_h}{\partial \vec{x}^i}\vec{\xi}^i+\sum_{i=1}^{h}\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_i}\left(f_h\overline{\vec{\eta}^i}\right)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Équation du mouvement. — Nous supposerons que l'énergie potentielle Φ entre deux particules i et j de nature A_i et A_j ne dépend que de leur distance r_{ij} (ce qui implique que cette distance peut être définie et par conséquent que les particules ont un centre de symétrie) d'où la notation $\Phi_{A_iA_j}(r_{ij})$.

L'accélération $\vec{\eta}^i$ d'une particule des h considérées est donnée par

$$\vec{\eta}^i=-\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{h}\frac{\partial\Phi_{A_iA_j}(r_{ij})}{\partial\vec{x}^i}+\frac{1}{m_i}\sum\text{forces dues aux }(N-h)\text{ autres particules,}\qquad(2)$$

où m_i désigne la masse de la particule considérée.

Dans le cas des particules identiques, il suffisait pour évaluer le deuxième terme de (2) de considérer la force due à une $(h+1)^{\text{ième}}$ particule prenant toutes les positions et vitesses possibles, chaque force étant multipliée par sa probabilité d'existence. Dans notre problème, si la $(h+1)^{\text{ième}}$ particule est d'une certaine nature A^l_{h+1}, la force qu'elle exerce sur la particule i est

$$-\frac{\partial\Phi_{A_iA^l_{h+1}}[r_{i,h+1}]}{\partial\vec{x}^i}$$

et la probabilité d'existence de cette situation, compte tenu des conditions imposées,

$$\frac{f_{h+1,A_1\ldots A_hA^l_{h+1}}\left(t,\,\vec{x},\,\vec{\xi}\right)\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}\,\mathrm{d}\vec{\xi}^{h+1}}{f_{h,A_1\ldots A_h}\left(t,\,\vec{x},\,\vec{\xi}\right)}=\frac{f_{h+1,A^l_{h+1}}\,\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}\,\mathrm{d}\vec{\xi}^{h+1}}{f_h}.$$

Nous devons considérer toutes les natures possibles de la $(h+1)^{\text{ième}}$ particule, de sorte que

$$f_h\overline{\vec{\eta}^i}=-\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{h}f_h\frac{\partial\Phi_{A_iA_j}(r_{ij})}{\partial\vec{x}^i}-\frac{1}{m_i}\sum_{l}\int f_{h+1,A^l_{h+1}}\frac{\partial\Phi_{A_iA^l_{h+1}}(r_{i,h+1})}{\partial\vec{x}^i}\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}\,\mathrm{d}\vec{\xi}^{h+1}.\qquad(2\,bis)$$

L'équation de continuité s'écrit en combinant (1) et (2 *bis*).

Équation d'équilibre. — Une solution de la forme

$$f_{h,A_1\ldots A_h}=n_{h,A_1\ldots A_h}\prod_{i=1}^{h}\left[\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m_i}{2kT}\xi^{i^2}}\right]$$

ne convient que si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial n_{h,A_1\ldots A_h}}{\partial\vec{x}^i}+\sum_{j=1}^{h}\frac{n_{h,A_1\ldots A_h}}{kT}\frac{\partial\Phi_{A_iA_j}(r_{ij})}{\partial\vec{x}^i}+\sum_{l}\int\frac{n_{h+1,A_1\ldots A_hA^l_{h+1}}}{kT}\frac{\partial\Phi_{A_iA^l_{h+1}}(r_{i,h+1})}{\partial\vec{x}^i}\mathrm{d}\vec{x}^{h+1}=0.\qquad(3)$$

Comme dans la théorie de Born et Green, on pourrait à partir de n_N déterminer les $n_{N-1}, \ldots$ et ainsi de suite.

Les expressions (3) peuvent fournir des relations entre les n_2 et les n_3. Elles permettent donc le calcul effectif des n_2 si l'on introduit par ailleurs des liaisons entre les fonctions n_2 et n_3.

La probabilité de trouver une particule d'espèce A_i dans un élément de volume $\mathrm{d}v_i$ est

$$\frac{p_{A_i}N}{V}\mathrm{d}v_i=\frac{p_{A_i}}{v_1}\mathrm{d}v_i=p_{A_i}n_1\,\mathrm{d}v_i=n_{1,A_i}\,\mathrm{d}v_i,$$

où N est le nombre total des particules situées dans V, v_1 le volume moyen offert à une particule (sans distinction de nature), n_1 le nombre moyen de particules dans l'unité de volume.

Dans ces conditions la probabilité $n_{2,A_iA_j}(r_{ij})\,dv_i\,dv_j$ peut se mettre sous la forme

$$n_{2,A_iA_j}(r_{ij})\,\mathrm{d}v_i\,\mathrm{d}v_j=p_{A_i}n_1p_{A_j}n_1P_{A_iA_j}(r_{ij})\,\mathrm{d}v_i\,\mathrm{d}v_j,$$

où $P_{A_iA_j}(r_{ij})$ tend vers l'unité quand r tend vers l'infini. $P_{A_iA_j}(r_{ij})$ est une fonction de distribution intervenant lors des théories de la diffusion des rayons X par les gaz et liquides.

Cherchons maintenant la probabilité $n_{3,A_iA_jA_l}\,\mathrm{d}v_i\,\mathrm{d}v_j\,\mathrm{d}v_l$. Nous pouvons toujours écrire

$$n_{3,A_iA_jA_l}=n_{2,A_iA_j}\times\text{Fonction de}\,(r_{ij},\,r_{jl},\,r_{li}).$$

Les symétries imposent la forme

$$n_{3,A_iA_jA_l}=\frac{n_{2,A_iA_j}(r_{ij})\,n_{2,A_jA_l}(r_{jl})\,n_{2,A_lA_i}(r_{li})}{n_{1,A_i}n_{1,A_l}n_{1,A_j}}\times\text{Fonction de}\,(r_{ij},\,r_{jl},\,r_{li}).$$

La généralisation du « superposition approximation » de Kirkwood et Boogs [8] conduit à écrire que la fonction indéterminée est identique à l'unité.

Dans ces conditions, l'équation (3) relative à $h = 2$ devient

$$\frac{\partial n_{2,A_1A_2}(r_{12})}{\partial \vec{x}^2} + \frac{n_{2,A_1A_2}(r_{12})}{kT}\frac{\partial \Phi_{A_1A_2}(r_{12})}{\partial \vec{x}^2}$$
$$= \frac{n_{2,A_1A_2}(r_{12})}{n_{1,A_1}n_{1,A_2}}\sum_l \frac{1}{n_{1,A_3^l}}$$
$$\times \int n_{2,A_2A_3^l}(r_{23})\,n_{2,A_3A_1}(r_{31})\frac{\partial \Phi_{A_2A_3^l}(r_{23})}{\partial \vec{x}^3}\,\mathrm{d}\vec{x}^3.$$

En effectuant alors des calculs analogues à ceux de Born et Green on aboutit à

$$\log\frac{n_{2,A_1A_2}(r)}{n_{1,A_1}n_{1,A_2}} + \frac{\Phi_{A_1A_2}(r)}{kT}$$
$$= \sum_l \pi n_{1,A_3^l}\int_0^\infty\int_{-s}^{+s}(s^2-t^2)\frac{t+r}{r}\left\{\frac{n_{2,A_3^lA_1}(t+r)}{n_{1,A_3^l}n_{1,A_1}} - 1\right\}\mathrm{d}t$$
$$\times \frac{n_{2,A_2A_3^l}(s)}{n_{1,A_2}n_{1,A_3^l}}\,\frac{\Phi'_{A_2A_3^l}(s)}{kT}\,\mathrm{d}s$$

et de façon plus générale en simplifiant les notations (nous n'avons plus maintenant à distinguer les indices de positions 1, 2, 3 et les indices de nature des particules A_1, A_2, A_3) :

$$\log\frac{n_{2,ij}(r)}{n_{1,i}n_{1,j}} + \frac{\Phi_{ij}(r)}{kT}$$
$$= \sum_l \pi n_{1,l}\int_0^\infty\int_{-s}^{+s}(s^2-t^2)\frac{t+r}{r}$$
$$\times\left\{\frac{n_{2,li}(t+r)}{n_{1,l}n_{1,i}} - 1\right\}\mathrm{d}t\,\frac{n_{2,jl}(s)}{n_{1,j}n_{1,l}}\,\frac{\Phi'_{jl}(s)}{kT}\,\mathrm{d}s. \quad (3\,bis)$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous posons, en généralisant l'expression de Rodriguez [5],

$$n_{2,ij} = n_{2,ji} = n_{1,i}n_{1,j}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Phi_{ij}(r)}{kT} + f_{ij}(r)},$$
$$\alpha_{ij}(r) = \alpha_{ji}(r) = \mathrm{e}^{-\frac{\Phi_{ij}(r)}{kT}} - 1,$$

$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$ = valeur moyenne de $f_{ij}(r)$ pour les petites valeurs de r.

Avec les mêmes hypothèses de calcul que celles des articles de Green et Rodriguez, on obtient alors

$$r f_{ij}(r) = \sum_l 2\pi n_{1,l}\int_0^\infty\int_{-s}^{+s}(t+r)$$
$$\times\{f_{il}(t+r) + \varepsilon_{il}\alpha_{il}(t+r)\}\,\mathrm{d}t\,\varepsilon_{jl}\alpha_{jl}(s)\,s\,\mathrm{d}s,$$

soit encore en posant

$$\lambda^{-1} = (2\pi)^{\frac{3}{2}}n_1 \qquad \text{et} \qquad n_{1,l} = p_l n_1,$$

$$\lambda r f_{ij}(r) = \sum_l p_l\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty\int_{-s}^{+s}(t+r)$$
$$\times\{f_{il}(t+r) + \varepsilon_{il}\alpha_{il}(t+r)\}\,\mathrm{d}t\,\varepsilon_{jl}\alpha_{jl}(s)\,s\,\mathrm{d}s. \quad (4)$$

On peut ensuite montrer qu'il existe entre les différentes transformées de Fourier

$$h g_{ij}(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} r f_{ij}(r)\sin hr\,\mathrm{d}r,$$
$$h\beta_{ij}(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} r\alpha_{ij}(r)\sin hr\,\mathrm{d}r,$$

un ensemble de relations linéaires

$$\lambda g_{ij}(h) = \sum_l p_l[g_{il}(h) + \varepsilon_{il}\beta_{il}(h)]\varepsilon_{jl}\beta_{jl}(h). \quad (5)$$

Les expressions (5) constituent un système d'équations permettant de calculer les $g_{ij}(h)$. Si le nombre d'espèces de particules est m, il y a $m(m-1)$ équation (5). Mais on peut remarquer que les g_i au nombre de m, sont reliés par m équations, de sorte que les expressions générales des g_{ij} seront données par le rapport de deux déterminants du $m^{\text{ième}}$ ordre. En mettant (5) sous la forme

$$\lambda g_{ij}(h) - \sum_l p_l g_{il}(h)\varepsilon_{jl}\beta_{jl}(h) = \sum_l p_l\varepsilon_{il}\beta_{il}(h)\varepsilon_{jl}\beta_{jl}(h),$$

soit en posant

$$\varepsilon_{jl}\beta_{jl}(h) = \gamma_{jl}(h),$$
$$\lambda g_{ij}(h) - \sum_l p_l g_{il}\gamma_{jl}(h) = \sum_l p_l\gamma_{il}(h)\gamma_{jl}(h) \quad (6)$$

le déterminant principal $\Delta(\lambda, h)$, dénominateur de toutes les expressions $g_{ij}(h)$ apparaît être de la forme classique :

$$\Delta(\lambda, h) = \begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11}(h) & -p_2\gamma_{12}(h) & \dots & -p_m\gamma_{1m}(h) \\ -p_1\gamma_{21}(h) & \lambda - p_2\gamma_{22}(h) & \dots & -p_m\gamma_{2m}(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1\gamma_{m1}(h) & -p_2\gamma_{m2}(h) & \dots & \lambda - p_m\gamma_{mm}(h) \end{vmatrix}.$$

Mélanges de deux espèces de particules. — A titre d'exemple nous donnerons les expressions des g_{ij} dans le cas de deux sortes de particules.

$$g_{11} = \frac{\begin{vmatrix} p_1\gamma_{11}\gamma_{11} + p_2\gamma_{12}\gamma_{12} & -p_2\gamma_{22} \\ p_1\gamma_{11}\gamma_{21} + p_2\gamma_{12}\gamma_{22} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & -p_2\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}, \quad (7.1)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & p_1\gamma_{11}\gamma_{11} + p_2\gamma_{12}\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & p_1\gamma_{11}\gamma_{21} + p_2\gamma_{12}\gamma_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & -p_2\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} p_1\gamma_{21}\gamma_{11} + p_2\gamma_{22}\gamma_{12} & -p_2\gamma_{22} \\ p_1\gamma_{21}\gamma_{21} + p_2\gamma_{22}\gamma_{22} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & -p_2\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}, \quad (7.2)$$

$$g_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & p_1\gamma_{21}\gamma_{11} + p_2\gamma_{22}\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & p_1\gamma_{21}\gamma_{21} + p_2\gamma_{22}\gamma_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda - p_1\gamma_{11} & -p_2\gamma_{12} \\ -p_1\gamma_{21} & \lambda - p_2\gamma_{22} \end{vmatrix}}. \quad (7.3)$$

En supposant $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$ (cas d'une seule espèce de particule), on retrouve bien le résultat de Born et Green :

$$g_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11}\gamma_{11} & 0 \\ - & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda - \gamma_{11} & 0 \\ - & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{\gamma_{11}\gamma_{11}}{\lambda - \gamma_{11}} = \frac{\gamma^2}{\lambda - \gamma} = \frac{\varepsilon^2\beta^2}{\lambda - \varepsilon\beta}.$$

Les fonctions $f_{ij}(r)$, et par conséquent les $n_{2,ij}(r)$ sont déterminées à partir des $hg_{ij}(h)$ et de leur transformée de Fourier.

Le calcul des $f_{ij}(r)$ se présente de façon différente suivant que le dénominateur $\Delta(\lambda, h)$, commun à l'expression de tous les $g_{ij}(h)$, peut s'annuler ou non pour une valeur réelle de h. Quelle que soit la composition du mélange (déterminée par p_1 par exemple) le déterminant $\Delta(\lambda, h)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de h si la matière est assez dispersée, c'est-à-dire λ assez grand. Si au contraire λ diminue, il apparaît une valeur $\lambda(p_1)$ à partir de laquelle l'équation en h : $\Delta(\lambda, h, p_1) = 0$ possède une racine réelle. En généralisant les considérations de Born et Green, il semble que l'on puisse attribuer une signification physique aux $\lambda(p_1)$: ils sont liés au passage du fluide de l'état gazeux à l'état liquide. Ces propriétés s'étendent au cas général.

Si, à titre de vérification, on cherche à atteindre l'équation d'état au moyen de

$$p = n_1 kT - \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \sum_i \sum_j n_{2,ij}(r)\,\Phi'_{ij}(r)\,r^3\,dr,$$

les résultats précédents permettent d'obtenir

$$p_1 = n_1 kT\left[1 - n_1\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{2}\sum_i\sum_j p_i p_j \beta_{ij}(0) + \ldots\right],$$

ce qui constitue les deux premiers termes classiques du viriel si l'on remarque que

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\beta_{ij}(0) = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{\Phi_{ij}(r)}{kT}} - 1\right) 4\pi r^2\,dr.$$

Conclusion. — Les expressions (6) et (7) nous ont permis d'établir une expression de l'intensité du rayonnement X diffusé par un ensemble de particules de plusieurs espèces différentes, où les effets du rapprochement des particules, de la composition de l'ensemble et de la nature des forces interparticulaires sont séparés.

Manuscrit reçu le 15 septembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Fournet G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1421.
[2] Zernicke et Prins. — *Z. Physik*, 1927, **41**, 184.
[3] Born M. et Green H. S. — *Proc. Roy. Soc.*, 1946, A **188**, 10.
[4] Green H. S. — *Proc. Roy. Soc.*, 1947, A **189**, 103.
[5] Rodriguez A. E. — *Proc. Roy. Soc.*, 1949, A **196**, 73.
[6] Fournet G. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 1071.
[7] Fournet G. — *Thèse*, Paris, 1950, (à paraître *Bull. Soc. Franc. Min. et Crist.*).
[8] Kirwood et Boggs. — *J. Chem. Phys.*, 1942, **10**, 394.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, MAI 1951, PAGE 595.

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES LENTILLES ÉLECTRONIQUES FAIBLES LA PREMIÈRE APPROXIMATION

Par F. BERTEIN.

Laboratoire de Radioélectricité de l'École Normale Supérieure.

Sommaire. — Après avoir rappelé ce que l'on peut entendre par lentilles faibles en Optique électronique, on montre à l'aide de calculs simples quelques propriétés générales concernant leur convergence, avec applications à des cas particuliers usuels; on souligne pour terminer la différence de comportement entre lentilles électriques et lentilles magnétiques.

On sait que, dans l'étude des trajectoires fournies par une lentille électronique, la complexité du problème exige que l'on se limite au voisinage de l'axe ou d'une trajectoire particulière. C'est à l'aide de développements en séries que l'on cherche à déterminer la structure des faisceaux, et cette structure apparaît alors comme déterminée par une somme de termes d'importances diverses (aberrations). Le champ d'action de cette méthode ne peut s'étendre jusqu'aux rayons marginaux, c'est-à-dire

ceux passant au voisinage des bords des électrodes; le nombre de termes à envisager dans les développements si l'on voulait atteindre cette zone, conduirait à des calculs impraticables; le champ peut du reste présenter sur les électrodes des singularités, sources d'autres difficultés. Fort heureusement du reste, les rayons marginaux des lentilles ne sont pas à envisager dans la pratique.

Les instruments d'Optique électronique mettent également en jeu des électrodes que l'on ne range pas sous la rubrique « lentilles »; tels sont par exemple les fentes et les diaphragmes chargés de limiter les faisceaux. Ces électrodes ont en général non seulement une action mécanique d'interception, mais aussi une action électrique due aux modifications qu'elles apportent aux champs préexistants; aussi leurs effets optiques ont-ils été déjà envisagés partiellement.

De tels éléments se présentent sous un aspect notablement différent de celui des lentilles proprement dites, et cela pour deux raisons principales :

1° ce sont des lentilles faibles, c'est-à-dire de propriétés de convergence peu accentuées;

2° les trajectoires remplissent leur ouverture dans leur totalité au lieu d'être localisées dans la zone centrale.

Nous nous proposons de mettre en évidence *quelques propriétés simples des lentilles faibles exemptes de symétrie imposée* a priori, *et considérées avec leur pleine ouverture :* elles s'appliqueraient à des dispositifs très variés mais de convergence faible : correcteurs d'astigmatisme en Microscopie, champs perturbateurs (champs de fuite d'aimants). champs étudiés par la méthode électronique de Marton [1], etc.

Jusqu'à mention contraire, nous envisageons le cas de champs purement électriques, abstraction faite des phénomènes de charge d'espace; les particules seront des électrons.

1. Position du problème. — L'espace est rapporté aux coordonnées rectangulaires $Oxyz$, Oz définissant dans la suite la direction moyenne des trajectoires (direction axiale). On utilisera le cas échéant les coordonnées cylindriques $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ et également la coordonnée complexe, $s = re^{i\theta}$.

Prenons une lentille L formée par une ouverture percée dans une plaque métallique (plan $z = 0$) et faisant communiquer deux régions dont les champs « au loin » sont uniformes et parallèles à Oz : E_1, E_2 respectivement à gauche et à droite (*fig.* 1).

Soit d'abord $v(x, y, z)$ la loi de potentiel en l'absence de l'ouverture : elle se réduit à la juxtaposition des deux champs uniformes E_1, E_2 :

$$v = \begin{cases} -E_1 z & \text{pour } z < 0, \\ -E_2 z & \text{pour } z > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(à une constante additive près).

Le champ correspondant est discontinu au passage par $z = 0$.

Les trajectoires correspondant à cette loi sont des arcs de parabole.

Revenons à la loi de potentiel en présence de l'ouverture; on la notera

$$v(x, y, z) + \varphi(x, y, z), \qquad (2)$$

ce qui revient à dire que l'introduction de la lentille représentée par le trou se traduit par un potentiel supplémentaire $\varphi(x, y, z)$ dont la zone d'action effective D est du reste limitée.

Étant donné une trajectoire T traversant la

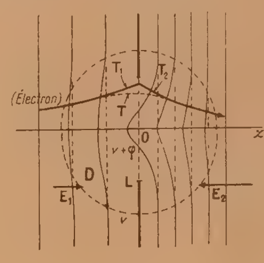


Fig. 1.

lentille, on peut dire que T comporte trois parties : la partie centrale dans D, où se manifeste l'action spécifique de la lentille; les deux parties extrêmes situées dans des champs presque uniformes, et qui par suite se confondent asymptotiquement avec des arcs de paraboles T_1 à gauche, T_2 à droite. Au point de vue des applications, seule importe la correspondance entre ces deux arcs. On pourra faire abstraction de T elle-même : *La lentille* L *sera considérée comme infiniment mince dans le plan* $z = 0$; étant donné le rayon incident T_1, l'émergent T_2 s'en déduit par une brisure qu'il s'agit de calculer et qui s'effectue dans ce plan à l'approximation admise.

Un tel schéma s'étend à des cas plus généraux. La « lentille » peut comporter une ou plusieurs électrodes de formes quelconques et portées éventuellement à des tensions différentes. On mettra la loi de distribution de potentiel sous la forme (2); v représente une loi relativement simple indépendante de la configuration locale de L et dont la valeur, ainsi que celle du champ associé peuvent présenter une discontinuité qu'on supposera toujours dans le plan $z = 0$; φ est le terme tenant compte de la configuration des électrodes, terme de zone d'action limitée au voisinage, de telle sorte qu'au loin il ne reste que v; on pourra dire sommairement que φ *est le potentiel créé par* L.

Chaque trajectoire T se confond ainsi à ses extrémités avec des arcs de trajectoires du champ v, respectivement à gauche et à droite, et entre lesquels il s'agit d'établir la correspondance.

Nous supposerons la *lentille faible :* à cet effet le potentiel $v + \varphi$ doit dans la zone de L varier peu par rapport à la tension d'accélération v_0 des particules.

2. Calcul de la déviation $\vec{\delta}$, fonction Φ. — Soit un rayon incident parallèle à Oz ou du moins peu incliné sur cet axe; écrivons à l'intérieur de la zone d'action D les équations du mouvement régissant les coordonnées transversales $x(z)$ et $y(z)$; ce sont, pour des particules négatives dont $\frac{m}{e} = 1$ (¹)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial(v+\varphi)}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial(v+\varphi)}{\partial y}$$

(l'origine des potentiels correspond conformément à l'usage, à une vitesse nulle pour les particules).

En raison des hypothèses posées, la vitesse est sensiblement constante, en grandeur, soit $\sqrt{2v_0}$, et en direction : x et y restent constants en première approximation à l'intérieur de D; on pourra écrire en conséquence :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2v_0}\frac{\partial(v+\varphi)}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{2v_0}\frac{\partial(v+\varphi)}{\partial y};$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= A + \frac{1}{2v_0}\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial(v+\varphi)}{\partial x}\,dz,\\ \frac{dy}{dz} &= B + \frac{1}{2v_0}\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial(v+\varphi)}{\partial y}\,dz,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

les intégrales sont calculées pour x et y fixés.

Soient les coordonnées $x_0(z)$, $y_0(z)$ des trajectoires asymptotes T_1, T_2; elles s'écrivent à l'aide de (3) en faisant $\varphi = 0$ et en adoptant des constantes d'intégration aisées à déterminer d'après la condition d'asymptotisme :

$$\frac{dx_0}{dz} = \begin{cases} A + \dfrac{1}{2v_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial v}{\partial x}\,dz & \text{pour } T_1, \\ A + \dfrac{1}{2v_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dz + \dfrac{1}{2v_0}\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial v}{\partial x}\,dz & \text{pour } T_2; \end{cases}$$

$$\frac{dy_0}{dz} = \text{expressions analogues.}$$

On en déduit les variations de pente relativement aux deux coordonnées x et y quand on passe de T_1 à T_2 :

$$\left.\begin{aligned}\delta_x &= \left(\frac{dx_0}{dz}\right)_{T_2} - \left(\frac{dx_0}{dz}\right)_{T_1} = \frac{1}{2v_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dz,\\ \delta_y &= \left(\frac{dy_0}{dz}\right)_{T_2} - \left(\frac{dy_0}{dz}\right)_{T_1} = \frac{1}{2v_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dz.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On considérera δ_x et δ_y comme définissant un vecteur transversal $\vec{\delta}(x, y)$ qu'on nommera déviation du rayon correspondant.

Cette fonction suffit à déterminer les propriétés de la lentille L au degré d'approximation admis : on passe aisément de T_1 à T_2 par le changement de pente $\vec{\delta}(x, y)$. (4) s'écrit encore :

$$\boxed{\vec{\delta}(x, y) = \frac{1}{2v_0}\,\mathrm{grad}\,\Phi(x, y),} \quad (5)$$

en posant

$$\boxed{\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y, z)\,dz.} \quad (6)$$

Ces fonctions ne sont bien entendu à considérer que dans la zone de passage des rayons, c'est-à-dire dans le domaine (x, y) correspondant aux ouvertures des lentilles.

Établissons une équation simple gouvernant Φ en calculant le laplacien de cette fonction :

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dz,$$

c'est-à-dire puisque $\varphi(x, y, z)$ est harmonique,

$$\Delta\Phi = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,dz,$$

et par intégration,

$$\Delta\Phi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{-\infty}^{-0} - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{+0}^{+\infty} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{-0}^{+0}.$$

La fonction $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ est en effet discontinue à la traversée du plan $z = 0$: elle y présente la même discontinuité que $\frac{\partial v}{\partial z}$, mais au signe près [car l'ensemble $(v + \varphi)$ est une fonction régulière].

Or la discontinuité de $\frac{\partial v}{\partial z}$ est connue; c'est

$$\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{-0}^{+0} = -E(x, y),$$

où E = *variation du champ axial dérivé de v quand on traverse $z = 0$;* il en résulte

$$\boxed{\Delta\Phi = E(x, y).} \quad (7)$$

(¹) On sait que la valeur de ce rapport n'intervient pas dans les résultats.

Nous supposerons par la suite *la fonction* $E(x, y)$ *sensiblement constante* dans le domaine utile de (x, y) : il suffit à cet effet que *le champ dérivé de* v *soit à peu près uniforme de part et d'autre du plan* $z = 0$; dans le cas d'une loi v correspondant à des champs strictement uniformes (1), on aurait ainsi

$$\Delta\Phi = E_2 - E_1,$$

ce que l'on pourrait d'ailleurs obtenir de manière plus rapide.

On peut trouver une signification géométrique simple à cette fonction $\Phi(x, y)$ caractéristique de la lentille; prenons un faisceau incident parallèle à l'axe Oz, alors (5) définit l'orientation des émergents T_2 au départ et exprime que ces rayons sont normaux à la surface d'équation

$$z = \frac{\Phi(x, y)}{2v_0}. \tag{8}$$

C'est donc là une *surface d'onde* Σ fixant le départ des émergents, et la relation (7) exprime la propriété géométrique suivante : on a, en tout point de Σ,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{E}{2v_0},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux; Σ a la structure d'une lame mince liquide étudiée dans les phénomènes capillaires.

3. **Convergence moyenne, son uniformité.** — Soit P un plan parallèle à $z = 0$ et très voisin, la distance correspondante étant notée 1 pour simplifier l'écriture. Étant donné un pinceau fin de rayons incidents T_1 de coordonnées moyennes (x, y), sa trace dans le plan P (ou celle de son prolongement) y découpe une petite courbe fermée C; le pinceau des émergents T_2 découpe de même une petite courbe C′ (*fig.* 2 *b*).

Soient σ et σ', les aires de C et C′; ce sont les

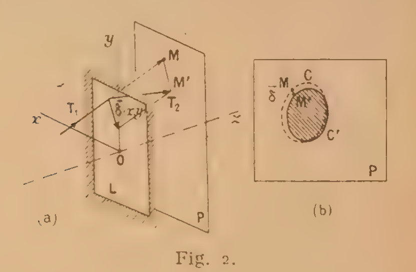


Fig. 2.

aires de sections du pinceau par le plan P, avant et après introduction de L. Il est naturel de définir la convergence moyenne de L dans la région (x, y) en faisant appel à la comparaison de σ et σ'.

Si $\vec{n}$ est le vecteur unité normal à C dans le plan P et dl l'élément d'arc

$$\sigma' - \sigma = \int_C \vec{\delta} \wedge \vec{n}\, ds = \iint_C \operatorname{div} \vec{\delta}\, d\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{\delta},$$

on mesurera la convergence moyenne de la lentille en (x, y) par

$$\frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} = -\operatorname{div} \vec{\delta}. \tag{9}$$

D'après (5) cette convergence est égale à $-\frac{1}{2v_0}\Delta\Phi$, et suivant (7),

$$\frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} = -\frac{E}{2v_0}. \tag{10}$$

Il en résulte que moyennant l'approximation envisagée, *la convergence moyenne d'une lentille faible* L *présente une valeur uniforme dans toute l'ouverture de* L; pour des électrons d'énergie donnée, elle ne dépend que de la discontinuité présentée par le champ associé à v, ou si l'on veut : le champ en l'absence de L.

Bien entendu, cette convergence moyenne ne suffit pas à déterminer la structure des faisceaux émergents : cette dernière connaissance exige celle de la fonction $\Phi(x, y)$ elle-même, ce que nous allons maintenant examiner dans quelques cas particuliers.

4. **Les lentilles faibles les plus simples.** — *Fente illimitée (optique à deux dimensions) (fig. 3).* — L est une surface cylindrique dont nous supposerons

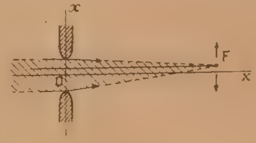


Fig. 3.

les génératrices parallèles à Oy. La fonction Φ est à une seule variable x et (7) en donne la valeur :

$$\Phi = \frac{E(x-h)^2}{2}, \tag{11}$$

d'où

$$\delta_x = \frac{E}{2v_0}(x - h). \tag{12}$$

Cette dernière relation exprime l'existence d'un plan de symétrie optique $x = h$ et d'une distance focale $f = \frac{2v_0}{E}$; ce dernier résultat est bien connu [2] et nous voyons ici toute sa généralité : le profil de l'ouverture peut être quelconque, et la propriété reste valable jusqu'aux rayons extrêmes. Faisons ici une fois pour toutes une remarque concernant la distance focale; il s'agit, conformément au plan,

de celle f de la *lentille* L *seule*, non de celle f' de la lentille L associée au champ v et qui est directement observable. On passe évidemment de f à f' si l'on connait les trajectoires T_1 et T_2.

Prenons une lentille symétrique par rapport au plan $x = 0$; alors l'optique en est symétrique par rapport à ce plan ($h = 0$), si les tensions v_1, v_2 des deux électrodes sont égales.

Si l'on fait varier ces tensions indépendamment l'une de l'autre, dans les limites suffisamment rapprochées, f et h, c'est-à-dire les coordonnées de la focale F, en sont fonctions linéaires. En particulier si la somme $v_1 + v_2$ reste constante, f reste constante : la focale F se déplace transversalement par raison de symétrie.

Lentilles de révolution. — Dans le cas d'une ouverture présentant la symétrie de révolution autour de Oz, et s'étendant jusqu'à cet axe, la fonction Φ est également de révolution : d'après (7),

$$\Phi = \frac{E}{4}(x^2 + y^2) = \frac{E}{4} r^2, \qquad (13)$$

et c'est la seule solution en vertu de l'unicité de Φ (voir plus loin).

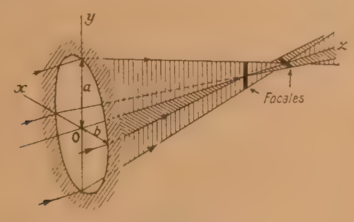


Fig. 4.

La déviation est radiale et de valeur

$$\delta = \frac{E}{4v_0} r.$$

L est une lentille de révolution de distance focale $\frac{4v_0}{E}$; ce résultat connu par ailleurs [2] se retrouve ici avec la généralité mentionnée à propos de l'exemple précédent. On obtient ainsi une distance focale deux fois plus grande que dans le cas à deux dimensions; effectivement la convergence définie par la relation (10) se partage ici suivant les deux directions x et y alors qu'elle se porte entièrement sur la direction x dans le cas des fentes illimitées.

Ouverture elliptique. — Prenons une plaque plane à ouverture elliptique, disposée comme l'indique la figure 4 et séparant deux champs uniformes [loi (1)]. La distribution de potentiel a été établie par Cotte [3] : si l'on envisage, pour tout point, la coordonnée elliptique λ définie par l'ellipsoïde homofocal passant par ce point :

$$\frac{x^2}{b^2+\lambda} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 1 = 0, \qquad (14)$$

$(v + \varphi)$ s'écrit sous la forme

$$|z|\, g(\lambda) + C_1 z. \qquad (15)$$

et

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\, g(\lambda)\, dz = \int_0^{+\infty} g(\lambda)\, dz^2 = \int_0^{+\infty} g(\lambda) \frac{\partial(z^2)}{\partial\lambda} d\lambda.$$

La dérivée $\frac{\partial(z^2)}{\partial\lambda}$ suppose x et y fixes et par suite, d'après (14),

$$\Phi(x, y) = D x^2 + D' y^2 \qquad \left(D + D' = \frac{E}{2}\right), \quad (16)$$

où

$$\left.\begin{aligned} D &= \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^2} - \frac{1}{b^2+\lambda}\right] g(\lambda)\, d\lambda, \\ D' &= \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2} - \frac{1}{a^2+\lambda}\right] g(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Il en résulte

$$\delta_x = 2Dx, \qquad \delta_y = 2D'y.$$

Nous obtenons ainsi la lentille astigmatique type : chacune des deux projections xOz, yOz, se comporte indépendamment avec une distance focale propre; les faisceaux incidents issus d'un point donnent des émergents s'appuyant sur deux focales.

On peut calculer les expressions (17) à l'aide d'intégrales elliptiques; dans le cas où $a \gg b$, on trouve [4]

$$\delta_y = \frac{E}{2v_0} \frac{b^2}{a^2} \log \frac{4a}{b} y, \qquad (18)$$

δ_x ayant bien entendu sensiblement la valeur donnée par (12). La formule (16) généralise celles (11) et (13) obtenues précédemment.

5. **Structure de $\vec{\delta}(x, y)$ dans le cas général.** — Cherchons tout d'abord la structure de la fonction $\Phi(x, y)$; en vertu de (7), on pourra l'écrire sous la forme

$$\Phi = \Phi' + \Phi'', \qquad (19)$$

où

Φ', fonction particulière satisfaisant (7);
Φ'', fonction harmonique.

Il en résulte que la possibilité de détermination de Φ à partir de conditions aux limites est la même

que pour une fonction harmonique (unicité de la solution).

Pour obtenir la forme analytique de Φ, il est commode de faire intervenir, au lieu de x et y, les coordonnées complexes s et $\bar{s}$ (s conjugué). Nous prendrons Φ' défini par l'équation (13); on sait d'autre part que Φ'', fonction harmonique réelle, peut s'exprimer par la somme d'une fonction analytique de s et de sa conjuguée; en conséquence

$$\Phi = \frac{E}{4} s\bar{s} + f(s) + \overline{f(s)}. \tag{20}$$

Passons à $\vec{\delta}$; ce vecteur sera tout naturellement représenté par un nombre complexe du plan $z = 0$; le symbole gradient s'écrit ici :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{s}},$$

s et $\bar{s}$ étant considérés comme variables indépendantes; (5) devient donc :

$$\vec{\delta} = \frac{1}{v_0}\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}, \tag{21}$$

soit, d'après (20),

$$\vec{\delta} = \frac{1}{v_0}\left[\frac{E}{4}s + \overline{f'(s)}\right], \tag{22}$$

$\overline{f'(s)}$ n'est autre qu'une fonction analytique de la variable $\bar{s}$, régulière à l'origine (si l'ouverture s'étend jusqu'à Oz), de sorte qu'on aura en développant au voisinage de cette origine :

$$\vec{\delta} = \frac{1}{v_0}\left[\frac{E}{4}s + a + b\bar{s} + c\bar{s}^2 + d\bar{s}^3 + \ldots\right] \tag{23}$$

(a, b, ..., coefficients complexes).

Si nous envisageons comme précédemment les sections par le plan P d'un pinceau incident et de l'émergent correspondant (*fig.* 2), soient C et C′, on peut toujours les supposer situées au voisinage de l'origine et leur appliquer (23); si s représente l'affixe d'un point M de C, $\vec{\delta}$ donne le déplacement à faire subir à M pour obtenir le point correspondant M′ de C′ et la relation précédente montre que $\vec{\delta}$ peut être considéré comme somme de déplacements ayant les actions suivantes sur la section du pinceau :

1° a, translation globale;

2° $\frac{E}{4v_0}s$, dilatation globale (homothétie), origine de ce que nous avons appelé la convergence moyenne;

3° $b\bar{s} + \ldots$, somme de déformations sans rotation d'ensemble car $\text{rot}\,\vec{\delta} = 0$.

L'existence de ces derniers termes dus à Φ est liée aux degrés éventuels de symétries de L.

Les cas particuliers passés en revue plus haut correspondent visiblement au cas où seuls existent les trois premiers termes de (23).

On notera qu'il n'existe pas en général de conditions aux limites simples qui puissent permettre de déterminer $\Phi(x, y)$.

Cas de détermination directe de $\Phi(x, y)$ par sa connaissance sur le contour. — Supposons la lentille placée en une région de potentiel constant (v = const.) et constituée par une portion de surface cylindrique de génératrices parallèles à Oz et telle que la schématise la figure 5 :

a, b, électrodes relativement longues, portées à la tension v;

c, d, électrodes à des tensions déterminées différentes de v.

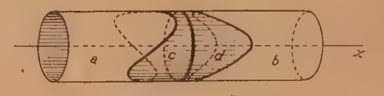


Fig. 5.

Alors $\varphi(x, y, z)$ est connue en tout point de la surface cylindrique indéfinie, car

$$v + \varphi = \begin{cases} v & \text{en dehors des électrodes } c, d, \ldots; \\ v_c, v_d, \ldots & \text{sur } c, d, \ldots. \end{cases}$$

On connaît dans ces conditions $\Phi(x, y)$ sur le contour, d'où découle sa loi de variation à l'intérieur. Il en résulte la possibilité de créer des lentilles de lois variées en agissant sur la forme ou la tension des électrodes c, d du cylindre; ces lentilles sont toutefois toutes de convergence moyenne nulle à l'approximation envisagée, puisque $E = 0$: les fonctions Φ y sont harmoniques.

Supposons par exemple que l'on veuille avoir à une constante additive près

$$\Phi(x, y) = C(x^2 - y^2)$$

dans un cylindre circulaire de rayon R.

C'est dire qu'on a sur le contour de l'ouverture :

$$\Phi = CR^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = CR^2\cos 2\theta. \tag{24}$$

Il suffira de faire appel à une électrode c portée à la tension $v_c = v + CR$, et dont la largeur en fonction de l'azimut θ est de la forme $K + R\cos 2\theta$.

Nous avons là un dispositif créateur d'astigmatisme d'un type déjà envisagé [5]; l'étude actuelle montre qu'il peut être utilisé vis-à-vis de rayons occupant toute son ouverture et non pas seulement vis-à-vis des rayons centraux. Deux électrodes c et d du type précédent décalées angulairement de $\frac{\pi}{4}$ (*fig.* 5) et de tensions indépendantes fournissent un astigmatisme réglable en intensité et orientation.

6. Lentilles faibles magnétiques. — On peut les étudier suivant la même méthode que les lentilles électriques. La loi de potentiel magnétique est notée

$$w(x, y, z) + \psi(x, y, z),$$

w représente une loi simple, mais éventuellement de champ discontinu dans le plan $z = 0$, c'est si l'on veut la loi en l'absence de lentille; ψ provient de la lentille et a une zone d'action limitée.

Les équations du mouvement des électrons sont alors en unités électrostatiques C. G. S. :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{mc} u \frac{\partial(w + \psi)}{\partial y},$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{e}{mc} u \frac{\partial(w + \psi)}{\partial x};$$

u, vitesse des particules, est égale à $\sqrt{\frac{2ev_0}{m}}$ et l'on aura ainsi

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{K}{\sqrt{v_0}} \frac{\partial(w + \psi)}{\partial y},$$
$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{K}{\sqrt{v_0}} \frac{\partial(w + \psi)}{\partial x},$$

en posant

$$K = \sqrt{\frac{e}{2mc^2}} \qquad (K = 0{,}295 \text{ en unités : cm, volt, gauss}).$$

Ces équations conduisent à l'expression suivante pour le vecteur déviation $\vec{\delta}(x, y)$:

$$\vec{\delta} = \frac{K}{\sqrt{v_0}} \operatorname{grad}' \Psi(x, y), \tag{25}$$

où l'on note

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad}' = \operatorname{grad} \text{ tourné de } +\frac{\pi}{2}, \\ &\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, z)\, dz, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Ψ vérifie la relation

$$\Delta\Psi = H(x, y), \tag{27}$$

où H représente la discontinuité du champ axial dérivé de w et qu'on supposera sensiblement constante dans l'ouverture.

Nous déduirons aisément de ce qui précède

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{\delta} = 0, \\ &\operatorname{rot} \vec{\delta} \left(= \frac{\partial \delta_y}{\partial x} - \frac{\partial \delta_x}{\partial y} \right) = K \frac{H}{\sqrt{v_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ces relations montrent les différences fondamentales existant entre lentilles faibles électriques et magnétiques : à l'approximation envisagée *la convergence moyenne des lentilles magnétiques est toujours nulle*; c'est une *rotation moyenne* qui est imprimée ici aux pinceaux par la discontinuité H de champ axial [6]. La valeur de cette rotation est

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta} = K \frac{H}{2\sqrt{v_0}},$$

Le développement de $\vec{\delta}$ est ici de la forme

$$\vec{\delta} = \frac{2K}{\sqrt{v_0}} \left[i \frac{H}{4} s + a + b\bar{s} + c\bar{s}^2 + d\bar{s}^3 + \ldots \right]. \tag{29}$$

On voit bien en comparant à (23) comment le passage d'une convergence moyenne à une rotation moyenne s'exprime par l'apparition du coefficient i dans le premier terme. Par contre, $\vec{\delta}$ a toujours une même structure pour les lentilles électriques et magnétiques dont E et H sont nuls : de telles lentilles ont des propriétés analogues, du moins vis-à-vis des particules identiques et monocinétiques.

Il importe pour conclure de bien souligner que les résultats exposés ne constituent qu'une première approximation. Nous verrons par l'étude du degré supérieur d'approximation, se manifester une complexité plus grande et dont il y a lieu de tenir compte dans divers cas de lentilles faibles rencontrés en pratique.

Manuscrit reçu le 1er décembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Marton L. et Lachenbruch S. — *Journ. Appl. Phys.*, 1949, **20**, 1171 et 1258.
[2] Davisson C. et Calbicks C. — *Phys. Rev.*, 1931, **38**, 585; 1932, **42**, 580.
[3] Cotte M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 377.
[4] Bertein F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **231**, 766.
[5] Bertein F. — *Ann. Radioélectr.*, 1948, **3**, 49.
[6] Bertein F. — *C. R. Acad. Sc.* 1951, 232, 491.

SUR LES PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES DE COUCHES MINCES DE GERMANIUM

Par M. J. M. DUNOYER

Laboratoire de Chimie physique de la Faculté des Sciences, Paris.

Sommaire. — La structure des couches minces de germanium a été déjà étudiée par diffraction d'électrons et microscopie électronique. On a pu mettre en évidence un état amorphe et un état cristalisé de la couche.

Le présent travail porte sur des mesures de résistance électrique de couches de germanium obtenues par vaporisation thermique dans le vide, d'épaisseur voisine de 1 μ.

Les mesures de résistance montrent bien un changement brusque d'état lorsque le support de la couche est portée environ à 350° C. La valeur de la résistivité varie alors dans un rapport voisin de 10^6.

On a pu mettre en outre en évidence un effet redresseur des couches minces de germanium. Les couches amorphes de grande résistance ohmique fournissent une relativement grande tension redressée en circuit ouvert, mais un très faible courant redressé de court-circuit. Inversement des couches cristallisées de faible résistance ohmique fournissent une très faible tension redressée en circuit ouvert, mais un relativement fort courant redressé de court-circuit. Dans les deux cas la puissance redressée est très faible.

On a pu préparer des couches présentant une puissance redressée très supérieure, au moyen de couches complexes constituées d'une couche cristallisée assez épaisse (1 μ) recouverte d'une très mince couche amorphe. Les résultats sont alors comparables à ceux obtenus avec un cristal de germanium pur.

Les propriétés très particulières du germanium, comme semi-conducteur, ont donné naissance depuis six ou sept ans, à de très nombreux travaux théoriques et expérimentaux [1]. L'importance pratique prise par le germanium pour la détection des ondes centimétriques le maintient au premier rang de l'actualité dans ce domaine.

Le travail que nous exposons ici est d'ordre purement expérimental. Il met en évidence certaines propriétés nouvelles du germanium qui ne pouvaient être observées sur des cristaux massifs.

Le but du travail était de préparer des couches de germanium par vaporisation dans le vide, et d'étudier les propriétés électriques de ces couches. Nous n'avons malheureusement pas pu jusqu'ici étudier l'effet Hall de ces couches.

1. Vaporisation du germanium dans le vide. — La distillation dans le vide du germanium ne va pas sans quelques difficultés, tout au moins si l'on cherche à déposer des couches relativement épaisses. Pour que la vitesse de formation de la couche ne soit pas trop lente, il faut porter le germanium à une température comprise entre 1200 et 1400° C. Si le germanium à cette température est placé directement en contact avec un métal réfractaire, tungstène ou tantale, il y a formation d'un eutectique plus fusible, qui entraîne la rupture rapide du filament ou la destruction de la capsule en tôle mince servant au chauffage. On peut tourner cette difficulté en utilisant de petits creusets de corindon aggloméré. Ce procédé peut également être utilisé pour la distillation du silicium pur, mais la difficulté est alors encore plus grande, car le silicium attaque assez rapidement les parois du creuset qui ne peut servir qu'à un très petit nombre d'opérations. Dans le cas du germanium la durée de vie du creuset est considérablement plus grande.

Nous avons utilisé personnellement des creusets de corindon cylindriques de 9 mm de diamètre extérieur et de 3 mm de diamètre intérieur avec une profondeur de cavité d'environ 6 mm. Le chauffage se fait par une spirale de fils de tungstène de 4/10e de millimètre enroulé sur le creuset (*fig.* 1).

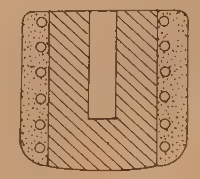


Fig. 1.

Si l'on ne met aucun calorifuge on est obligé, pour que le centre du creuset atteigne 1400° C de porter le filament lui-même à une température beaucoup plus élevée où l'on risque de vaporiser lentement le tungstène, ce qui peut au cours d'une vaporisation prolongée introduire une impureté dans la couche de germanium. On peut éviter cela en calorifugeant le filament. Il faut alors enduire la surface extérieure du creuset d'une bouillie d'alumine très finement pulvérisée en suspension dans de l'acétate d'amyle additionné de quelques gouttes de collodion. On projette cette bouillie au pistolet en couche suffisamment épaisse pour que les fils de la spirale chauffante soient noyés. On laisse sécher l'enduit à la température ordinaire. Après quelques

heures, on monte la pièce dans une enceinte bien vidée et on lance le courant dans la spirale en faisant croître lentement l'intensité pour que l'élévation de température soit assez progressive, jusqu'à ce que la cavité centrale du creuset atteigne 1400° C. La couche calorifuge est durcie par cette opération et l'ensemble convenablement dégazé.

2. Élaboration des couches de germanium. Texture. — Avec un creuset tel que nous venons de le décrire on obtient, en portant le germanium à 1400° C, au bout de quelques minutes, sur une plaque placée à 5 cm environ du creuset, une couche mince visible par sa coloration brune. Pour les expériences sur l'effet redresseur des couches de germanium que nous décrivons plus loin, une épaisseur de l'ordre de 1 μ s'est révélée nécessaire. La vaporisation doit durer alors environ 2 h, la couche prend en s'épaississant un aspect gris métallique.

Des couches de germanium très minces ont déjà été préparées par König [2] et leurs textures étudiées par diffraction d'électrons et microscope électronique.

Cet auteur a constaté qu'une couche déposée sur un support à la température ordinaire présentait un état amorphe, aucune cristallisation n'est visible au microscope électronique et les anneaux de diffraction d'électrons sont très diffus (*fig.* 2). En chauffant la même couche entre 450 et 500° C elle prend un état cristallin visible au microscope électronique et les anneaux de diffraction sont nets et intenses (*fig.* 3). On peut également obtenir une couche de germanium cristallisé en chauffant le support entre 350° et 400° C pendant la vaporisation du métal déposé.



Fig. 2. Fig. 3.

Dans l'ensemble ces résultats concordent avec ce que nous avons observé par des mesures électriques.

3. Mesures de la conductibilité des couches minces de germanium. — Des expériences qui ont été faites il résulte, que la conductiblité électrique du germanium déposé en couche mince par vaporisation dans le vide est susceptible de varier dans un rapport de l'ordre de 1 à 10^6 suivant le traitement thermique subi par la couche.

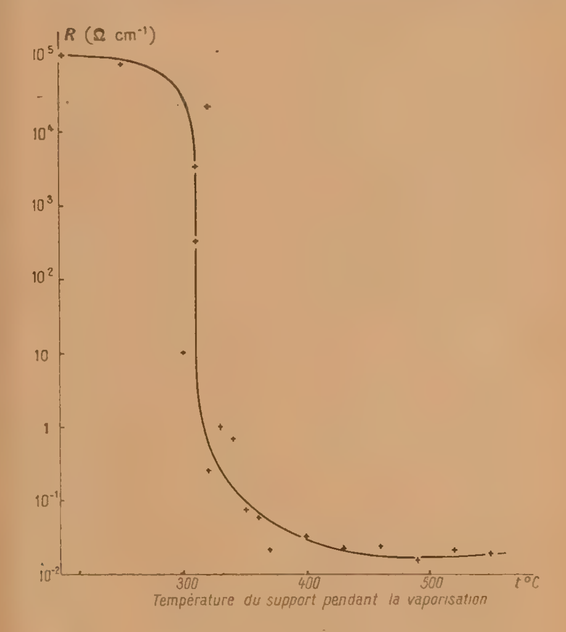


Fig. 4. — Résistance à la température ambiante.

L'appareil était disposé de telle sorte que l'on pût porter la plaquette supportant la couche à une température déterminée. La couche ainsi déposée sur un support chaud était laissée sous vide un temps suffisant pour qu'elle revienne à la température ambiante, puis elle était sortie de l'appareil et sa résistance mesurée à cette température. La plaquette support était en quartz dans ces premières expériences et les contacts assurés par distillation préalable sur le quartz de petites bandes d'or.

Les résultats des mesures faites de cette façon sont reproduits sur la figure 4. Lorsque le support, au cours de la vaporisation, a été porté à une température supérieure à 370° C, les résultats sont cohérents, la résistivité est petite, de l'ordre de 0,025 $\omega.cm^{-1}$.

En dessous de 370° C la résistivité croît nettement, puis, lorsque la couche a été vaporisée sur un support à une température comprise entre 350 et 300°, la résistivité croît extrêmement rapidement et les mesures d'un échantillon à l'autre sont incohérentes, il devient impossible de préparer une couche

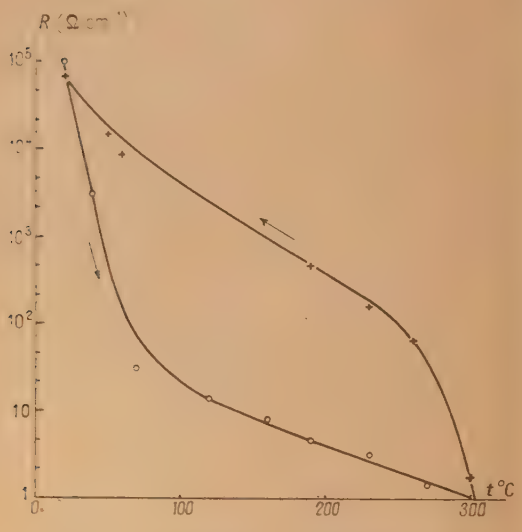


Fig. 5. — Résistance d'une couche amorphe en fonction de la température.

ayant une résistance donnée à l'avance, enfin la couche étant vaporisée sur un support à une température inférieure à 270°, la résistivité devient très grande, de l'ordre de $10^5\ \Omega.cm^{-1}$.

On peut conclure de ces expériences en les comparant à celles de König, que les couches déposées sur des supports maintenus à basse température (< 270°), présentant une très grande résistivité, sont à l'état amorphe et que les couches de faible résistivité (support au-dessus de 370°) sont cristallisées avec un domaine dans lequel la couche est dans un état intermédiaire où la résistivité (support entre 350 et 300°) varie très rapidement. Une nouvelle série d'expériences a été faite dans des conditions différentes. La couche était vaporisée sur un support froid donc amorphe et chauffée *ensuite*; la résistance était mesurée au cours de l'échauffement et du refroidissement. La variation de la résistivité en fonction de la température est représentée par la courbe de la figure 5. La température maximum pour laquelle ces courbes ont été tracées est 300° C. On a constaté comme on devait s'y attendre que au-dessus de cette température, la résistance à la température ordinaire ne reprenait pas sa valeur initiale. Il y a un commencement de cristallisation de la couche amorphe. On voit sur la courbe de la figure 5 que la variation de la résistance en fonction de la température, en l'absence d'un changement d'état de la couche, ne suit pas la même loi à l'échauffement et au refroidissement, la résistivité pour une même température était plus grande lors du refroidissement que de l'échauffement. Ce phénomène a déjà été constaté d'une façon générale pour les semi-conducteurs [3].

La courbe de la résistivité à la température ordinaire en fonction de la température d'échauffement du support, *après vaporisation sur le support froid*, est reproduite sur la figure 6. On retrouve bien qualitativement les résultats de König. Si la couche est chauffée après vaporisation la température pour laquelle on passe de l'état amorphe à l'état cristallin est sensiblement plus élevée que lorsque le support était chauffé pendant la vaporisation. La partie presque verticale de la courbe de la figure 4 est située entre 300 et 340° C, tandis que celle de la figure 6 est entre 360 et 400° C.

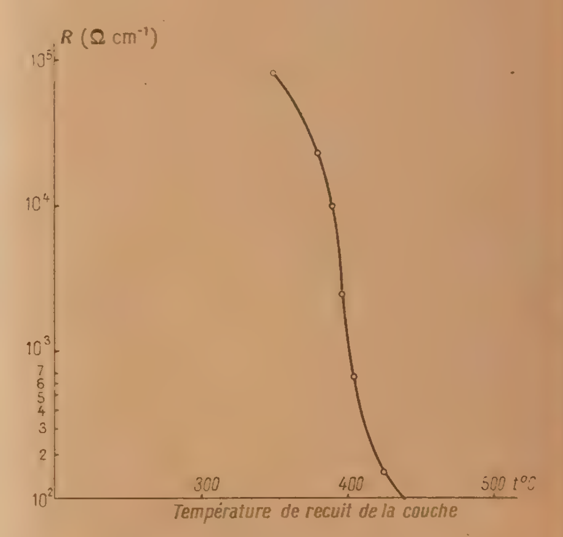


Fig. 6. — Résistance d'une couche, mesurée à la température ambiante en fonction du traitement thermique.

4. **Effet de redressement dans les couches minces de germanium.** — Dans le travail déjà cité, König signale que les couches de germanium ne présentent pas d'effet de redressement du courant. Nous sommes revenus sur cette question et avons trouvé qu'il était possible de préparer des couches présentant un effet de redressement non négligeable pour de faibles tensions appliquées.

La technique de vaporisation était la même que précédemment, mais le support était une tôle mince de molybdène au lieu d'une lame de quartz. Les contacts étaient pris d'une part sur la tôle support de la couche, d'autre part sur une petite pointe de tungstène appuyée sur la couche de germanium sous une pression de 30 g.

APPAREIL DE MESURE. — Pour étudier les propriétés de redressement de ces couches on a construit un appareillage dont le schéma est reproduit sur la figure 7. Il permet de tracer les caractéristiques d'un redresseur en courant continu, de mesurer le courant redressé de court-circuit et la tension redressée en circuit ouvert. Nous avons pratiquement conduit nos expériences avec du courant alternatif 50 périodes. Des essais qualitatifs ont été faits avec des ondes de 5 m et de 20 cm. Ils ont dans l'ensemble confirmé les mesures faites avec 50 périodes; mais n'ont pas été poursuivis puisqu'il s'est avéré que ces couches n'étaient pas pratiquement utilisables.

Le galvanomètre G_1 est à plusieurs sensibilités de façon à pouvoir mesurer des courants continus entre 12.10^{-9} et 2.10^{-2} A. Sa résistance maximum est de 70 Ω. L'appareil G_2 mesure le courant continu entre 10^{-4} et 6 A. G mesure le courant alternatif avec le même domaine de sensibilité. Les résistances R_2 et R_3 sont chacunes de 0,5 Ω. Si i est le courant (continu ou alternatif) mesuré par G_2 ou G, la tension (continue ou alternative) appliquée au redresseur D est $V = 0,5\, i$ (volts).

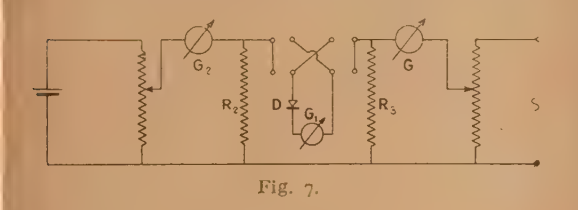


Fig. 7.

a. Mesure de la résistance de la couche redressante de germanium (D) *en courant continu.* — On applique aux bornes de R_2 une tension continue mesurée par G_2 et on lit le courant qui traverse la couche sur le galvanomètre G_1. Le contacteur I permet d'inverser la polarité, de sorte que l'on peut tracer la caractéristique continue de la couche ou du cristal redresseur.

b. Mesure du courant redressé de court-circuit. — On applique aux bornes de R_3 une tension alternative mesurée par G. G_1 indique le courant redressé. La résistance du circuit étant généralement, dans ces conditions, négligeable devant la résistance du redresseur, on a pratiquement le courant de court-circuit.

c. Tension redressée en circuit ouvert. — On opère comme précédemment, mais on établit aux bornes de R_2 une tension continue de sens convenable capable d'annuler la déviation de G_1. La mesure de cette tension continue mesurée par G_2 donne la tension redressée en circuit ouvert.

RÉSULTATS. — Il faut distinguer deux sortes de couches :

1° les couches dites amorphes de grande résistance ohmique (de l'ordre du mégohm) donnant un très faible courant redressé de court-circuit et une relativement grande tension redressée en circuit ouvert (couche du type 3 du Tableau I);

2° les couches cristallisées de faible résistance ohmique (au plus quelques dizaines d'ohms), donnant un grand courant redressé de court-circuit et une très faible tension redressée en circuit ouvert (couche du type 7).

Dans le Tableau I on a porté à gauche la tension alternative appliquée en volts, pour chaque redresseur on a tracé deux colonnes, l'une indiquant la tension redressée en circuit ouvert en volts, l'autre l'intensité du courant redressé de court-circuit i en microampères.

La couche 3 est une couche amorphe (vaporisée sur support à la température ambiante) d'épaisseur 2,8 μ. Sous une tension de 0,5 V sa résistance était d'environ 4 MΩ.

La couche 7 est une couche cristallisée, son épaisseur est de 1 μ et sa résistance d'environ 30 Ω.

Dans la dernière colonne à droite, on a reproduit le résultat des mesures faites sur un cristal de germanium pur.

La nature du métal constituant la pointe appuyée sur la couche n'apporte pas de modification sensible à ces résultats. Dans ces mesures la pointe du détecteur était reliée au pôle négatif.

TABLEAU I.

	Couche 7.		Couche 3.		Couche complexe.		Cristal Ge.	
V_{eff}.	V(volts).	i(μA).	V(volts).	i(μA).	V(volts).	i(μA).	V(volts).	i(μA).
0,1	0,0015	45	–	–	0,013	135	0,025	16
0,2	0,0035	100	–	–	0,028	300	0,060	40
0,3	0,0065	200	–	–	0,050	280	0,125	100
0,4	0,0095	320	0,023	0,006	0,070	975	0,200	178
0,5	0,0134	460	0,075	0,030	–	–	0,250	300
0,6	0,0160	590	0,135	0,065	–	–	0,310	380
0,7	0,0175	750	0,250	0,100	–	–	0,375	500
0,8	0,0190	950	0,315	0,175	–	–	0,430	590
0,9	0,0210	1100	0,375	0,225	–	–	0,475	700
1,0	0,0260	1350	0,412	0,300	–	–	0,525	850

Préparation de couches complexes. — En présence de ces résultats nous avons voulu essayer de préparer des couches complexes constituées d'une couche assez épaisse de germanium cristallisé de faible résistance, sur laquelle on forme une couche très mince amorphe de grande résistivité, la grande résistance de la couche amorphe mince étant susceptible de créer artificiellement une couche d'arrêt.

Les résultats ont été très sensiblement meilleurs en effet. Malheureusement ils sont difficiles à reproduire, au moins quantitativement, bien que le processus expérimental ait été toujours le même. On vaporisait d'abord une couche épaisse sur un support chauffé à 400° C, on arrêtait la vaporisation, laissant le support revenir à la température ambiante, on vaporisait alors pendant quelques minutes une mince couche sans chauffer le support. Les résultats sont reproduits dans le Tableau I dans l'avant-dernière colonne à droite.

On voit que pour de faibles tensions alternatives appliquées, inférieures à 0,5 V, les tensions redressées en circuit ouvert sont de l'ordre de dix fois plus grandes dans le cas de la couche complexe que dans le cas de la couche cristallisée (7), alors que les courants redressés de court-circuit sont du même ordre de grandeur; la caractéristique de la couche complexe a, en outre, une beaucoup plus grande courbure.

La comparaison des couches amorphes et des couches complexes est encore plus avantageuses à ces dernières, pour les faibles tensions appliquées l'effet de redressement n'est pas décelable avec les couches amorphes quand il est très notable avec les couches complexes.

Il est malheureusement dangereux pour la couche complexe de lui appliquer des tensions alternatives plus élevées, ceci, vraisemblablement à cause de la très faible épaisseur de la couche amorphe superficielle.

5. **Conclusions.** — Nous avons retrouvé dans ce travail l'existence de l'état amorphe du germanium vaporisé en couche mince déjà mis en évidence par König, la mesure de sa résistivité a montré qu'elle était environ un million de fois supérieure à la résistivité du germanium cristallisé, le passage de l'état amorphe à l'état cristallisé se faisant aux environs de 300° C, si le support portant la couche est porté à cette température au cours de la vaporisation. Si l'on fait cristalliser une couche amorphe déposée sur support froid, la transformation a lieu vers 375° C.

Nous avons étudié l'effet de redressement de ces couches, leur comportement est très différent suivant qu'elles sont amorphes ou cristallisées. On peut obtenir des résultats qui se rapprochent davantage des normes pratiques d'utilisation des redresseurs en préparant des couches complexes. Malheureusement les résultats varient beaucoup d'une couche à l'autre et sont difficiles à reproduire. Nous avions pensé que l'état microcristallin des couches les rendrait plus homogènes, au point de vue des propriétés de redressement, que les cristaux massifs. L'expérience montre qu'il n'en est rien, les propriétés variant considérablement suivant le point de contact de la pointe.

Manuscrit reçu le 3 mai 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Voir* Aigrain. — *Thèse*, Paris, 1950.
[2] König. — *Reichsber. f. Physik*, 1944.
[3] Gudden. — *Ergebnisse der exakten Natürwiss.*, vol. **13**, 1934.

SUR L'INTERPRÉTATION DES OPÉRATEURS DE LA THÉORIE DU POSITRON

Par JEAN G. VALATIN.

Institut Henri Poincaré, Paris (1).

Sommaire. — Le transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ des opérateurs M de la théorie d'un seul électron de Dirac est défini indépendamment de la matrice C et de la représentation matricielle. On distingue des opérateurs égaux ou opposés à leurs transformés de charge, et des relations sont établies entre les éléments de matrice de ceux-ci. Ces relations relient par la correspondance formelle (3) les opérateurs hermitiens $M = \overline{\overline{M}}$ à des opérateurs $\mathbf{M}$ de la théorie du positron changeant de signe par l'effet de la transformation (24), qui change le rôle des opérateurs de création et d'annihilation des électrons et des positrons, les opérateurs hermitiens $M = -\overline{\overline{M}}$ à des opérateurs $\mathbf{M}$ invariants par rapport à celle-ci. Pour garder le sens dynamique des opérateurs $M = \overline{\overline{M}}$ on peut introduire encore une autre correspondance (27) entre les opérateurs de la théorie d'une seule particule et de la théorie du positron. Le sens physique de ces deux correspondances est étudié sur quelques exemples. La dépendance de charge des opérateurs de la théorie du positron correspondant aux différentes expressions de densité de l'électron de Dirac est déterminée. La classification introduite des opérateurs permet de formuler un théorème simple de symétrie contenant comme cas spécial le théorème de Furry.

La théorie du positron présente par rapport à la théorie d'un système d'électrons non relativistes des particularités et en même temps des difficultés nouvelles. Une meilleure compréhension du formalisme paraît désirable en vue des possibilités mathématiques nouvelles fournies par cette théorie ainsi que de ces difficultés.

Dans un travail précédent [1] nous avons donné une représentation simple des états de la théorie du positron à l'aide des notions de l'algèbre extérieure. Ici, nous essayons d'analyser quelques questions concernant l'interprétation physique des opérateurs et la symétrie de charge de la théorie.

Le problème de la correspondance entre les opérateurs de la théorie d'une seule particule et de la théorie du positron.

Dans la théorie de l'électron non relativiste, l'état du système est caractérisé par un élément de l'espace $\wedge R$ des tenseurs antisymétriques de l'espace R des états d'un seul électron. Il y a une correspondance simple [1] entre les opérateurs W de R et les opérateurs $\mathbf{W} = \Sigma (r \mid W \mid s)\, a_r a_s^*$ de $\wedge R$ de la seconde quantification qui représentent la somme pour tous les électrons de la quantité représentée par W dans la théorie d'une seule particule.

Dans la théorie du positron on doit distinguer entre les sous-espaces R_+ et R_- de R correspondant aux états d'énergie positive et négative d'un seul électron libre. L'état d'un électron est caractérisé par un élément de l'espace R_+. Le changement du rôle des opérateurs de création et d'annihilation des états de R_- correspond à l'introduction des vecteurs duals de R_-, et l'état d'un positron est ainsi caractérisé par un élément de l'espace dual R_-^*. L'état du système d'électrons et de positrons est représenté par un élément de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ des tenseurs antisymétriques de l'espace $R_+ + R_-^*$. [1] En introduisant une base de fonctions d'onde $\varphi_{\underline{r}}(x)$ pour caractériser les états de R, avec des indices $\underline{r}$ soulignés, nous écrivons des indices r non soulignés pour les éléments de R_+, des indices primés s' pour les éléments de R_-.

Les opérateurs les plus simples de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^*)$ sont de la forme

$$\mathbf{M} = \sum_{\underline{r}\underline{s}} M_{\underline{r}\underline{s}} \overbrace{a_{\underline{r}} a_{\underline{s}}^*} = \mathbf{M}_{++} + \mathbf{M}_{--} + \mathbf{M}_{+-} + \mathbf{M}_{-+}, \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_{++} &= \sum_{rs} M_{rs}\, a_r a_s^*, & \mathbf{M}_{--} &= \sum_{r's'} (-M_{r's'})\, a_{s'}^* a_{r'}, \\ \mathbf{M}_{+-} &= \sum_{rs'} M_{rs'}\, a_r a_{s'}^*, & \mathbf{M}_{-+} &= \sum_{r's} M_{r's}\, a_{r'} a_s^*, \end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

a_r, $a_{s'}^*$ sont des opérateurs de création des électrons et positrons, a_r^*, $a_{s'}$ sont des opérateurs d'annihilation. Nous avons souligné dans le travail cité [1] que la notation peu symétrique des coefficients M_{rs} est choisie pour faciliter la comparaison de $\mathbf{M}$ avec les opérateurs formés à l'aide des éléments de matrice

$$(\underline{r} \mid M \mid \underline{s}) = \int \varphi_{\underline{r}}^*(x)\, M \varphi_{\underline{s}}(x)\, \mathrm{d}^3 x \quad (2)$$

d'un opérateur M de R et qu'on peut définir les opérateurs $\mathbf{M}$ d'une façon symétrique par rapport

(1) Actuellement Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Copenhague.

au rôle des électrons et des positrons sans introduire les constantes additives infinies de la théorie des trous ou des opérateurs symétrisés de Heisenberg.

L'introduction des états de positron au lieu des états d'énergie négative des électrons, le changement de R_- en R_-^*, change également l'interprétation des opérateurs. La correspondance formelle

$$M_{rs} = (r \mid M \mid s) \tag{3}$$

entre les coefficients M_{rs} de (1) et les éléments de matrice (2) d'un opérateur M de R, qui est la correspondance entre les opérateurs de la théorie d'une seule particule et de la seconde quantification dans la théorie non relativiste et qui est introduite également dans la théorie du positron, ne conserve pas toujours le sens physique des opérateurs.

Avec une base de fonctions d'onde planes monochromatiques et un volume de normalisation fini, (3) fait correspondre à l'opérateur

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \tag{4}$$

de la théorie d'un seul électron l'opérateur

$$\sum_r p_{xr}\, a_r a_r^* + \sum_{r'} (-p_{xr'})\, a_{r'}^* a_{r'} \tag{4 a}$$

de $\wedge(R_+ + R_-^*)$. (4) représente la composante x de la quantité de mouvement d'un seul électron, l'opérateur (4 a) la même quantité pour le système d'électrons et de positrons. Cependant à l'opérateur

$$p^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{5}$$

de R correspond selon la même prescription

$$\sum_r p_r^2\, a_r a_r^* + \sum_{r'} (-p_{r'}^2)\, a_{r'}^* a_{r'}. \tag{5 a}$$

Tandis que (5) est un opérateur important de la théorie d'un seul électron et $\frac{p^2}{2m}$ représente l'approximation non relativiste de l'énergie cinétique, (5 a) ne représente plus la somme des mêmes quantités pour les différentes particules. Car les états de positron fournissent une contribution négative à la valeur moyenne de cet opérateur, et dans un état où il n'y a que des positrons présents cette valeur moyenne est négative.

On doit donc étudier d'une part le sens physique de la correspondance (3) et trouver d'autre part une correspondance entre les opérateurs physiquement analogues de R et de $\wedge(R_+ + R_-^*)$. Ce problème est lié à celui de la symétrie de charge de la théorie du positron et nous étudierons d'abord le transformé de charge des opérateurs de la théorie d'une seule particule en divisant ces opérateurs en deux classes suivant qu'ils sont égaux ou opposés à leurs transformés de charge.

La matrice C. Le transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ de l'opérateur M. — Écrivons l'équation d'onde d'un électron de Dirac et sa complexe conjuguée sous la forme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_r(x, t) = \left\{ ic\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) - mc^2\beta \right\} \psi_r(x, t), \tag{6 a}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_r^*(x, t) = \left\{ ic\hbar\left(\alpha_1^* \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3^* \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + mc^2\beta^* \right\} \psi_r^*(x, t), \tag{6 b}$$

α_1^*, α_2^*, α_3^*, $\beta^* = \alpha_4^*$ sont les conjuguées complexes des matrices hermitiennes α_1, α_2, α_3, $\beta = \alpha_4$ et sont égales aux transposées $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}_4$ de ces matrices.

On peut faire correspondre [2, 3] à chaque solution r' d'énergie négative de l'équation de Dirac d'un électron une solution r d'énergie positive et réciproquement, par les relations

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_r^*(x, t) = C\,\psi_{r'}(x, t), & \psi_{r'}(x, t) = C^{-1}\psi_r^*(x, t), \\ \psi_{r'}^*(x, t) = C\,\psi_r(x, t), & \psi_r(x, t) = C^{-1}\psi_{r'}^*(x, t). \end{array}\right\} \tag{7}$$

C est une matrice unitaire déterminée dans une représentation donnée des matrices α_1, α_2, α_3, $\beta = \alpha_4$. La conjuguée complexe C^*, l'adjointe C^+, l'inverse C^{-1}, la transposée $\tilde{C}$ et C satisfont les relations

$$C = \tilde{C} = C^{*-1}, \qquad C^* = C^+ = C^{-1} = \tilde{C}^{-1}. \tag{8}$$

En écrivant (7) dans (6 b), multipliant par C^{-1} et comparant avec (6 a) on obtient les relations

$$\left.\begin{array}{lll} C^{-1}\alpha_1^* C = \alpha_1, & C^{-1}\alpha_2^* C = \alpha_2, & C^{-1}\alpha_3^* C = \alpha_3, \\ \beta = \alpha_4, & C^{-1}\alpha_4^* C = -\alpha_4. & \end{array}\right\} \tag{9}$$

Dans la représentation de Majorana [4], en choisissant des matrices hermitiennes α_1, α_2, α_3 avec des éléments de matrice réels, la matrice hermitienne $\beta = \alpha_4$ avec des éléments de matrice imaginaires, on a

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1^* = \alpha_1, \qquad \alpha_2^* = \alpha_2, \qquad \alpha_3^* = \alpha_3, \\ \alpha_4^* = -\alpha_4, \qquad C = 1, \\ \psi_r(x, t) = \psi_{r'}^*(x, t), \qquad \psi_{r'}(x, t) = \psi_r^*(x, t). \end{array}\right\} \tag{7 a}$$

En appelant conjugaison de charge [8] la transformation (7) faisant correspondre aux états d'électron des états de positron et inversement, Belinfante [5] définit pour chaque opérateur M de R un opérateur transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ par la relation

$$\overline{\overline{M}} = C^{-1} M^* C. \tag{10}$$

Dans la représentation (7 a) de Majorana le transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ de M est identique au complexe conjugué M^*.

$$\overline{\overline{M}} = M^*. \tag{10 a}$$

Les opérateurs $M = \overline{\overline{M}}$ et $M = -\overline{\overline{M}}$. Définition du transformé de charge indépendamment de la matrice C. — En écrivant

$$\left.\begin{aligned} &M = M_1 + M_2, \\ &M_1 = \frac{1}{2}\left(M + \overline{\overline{M}}\right), \qquad M_2 = \frac{1}{2}\left(M - \overline{\overline{M}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

tout opérateur M de R peut être décomposé en une partie

$$M_1 = \overline{\overline{M_1}} \qquad (11\,a)$$

égale et une partie

$$M_2 = -\overline{\overline{M_2}} \qquad (11\,b)$$

opposée à sa transformée de charge.

La définition (10) du transformé de charge, et ainsi les définitions (11) dépendent de la matrice C. La matrice C qui relie selon (9) les matrices α_i à leurs conjuguées complexes dépend essentiellement de la représentation choisie de ces matrices et ne peut pas être exprimée à l'aide des α_i indépendamment de la représentation matricielle [6]. Nous pouvons cependant définir le transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ d'un opérateur M indépendamment de la représentation matricielle des α_i. En effet, à l'aide des relations (9) on peut déterminer la transformée de charge des 16 matrices de Dirac formées des α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ et les relations ainsi obtenues sont indépendantes de la représentation matricielle choisie. On a par exemple,

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}} &= C^{-1}\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_4^* C \\ &= C^{-1}\alpha_1^* C C^{-1}\alpha_2^* C C^{-1}\alpha_4^* C = -\alpha_1\alpha_2\alpha_4. \end{aligned}$$

En exprimant donc un opérateur M à l'aide de x, $\frac{\partial}{\partial x}$ et des α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$M = M\left(i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right), \qquad (12)$$

on obtient le transformé de charge de M :

$$\overline{\overline{M}} = M\left(-i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4\right) \qquad (12\,a)$$

par la transformation

$$i \to -i, \qquad \alpha_4 \to -\alpha_4, \qquad (12\,b)$$

en changeant le signe de l'unité imaginaire i et de α_4 dans l'expression de M. Le transformé de charge d'un opérateur ne contenant que x et $\frac{\partial}{\partial x}$ est égal à son conjugué complexe.

En exprimant M à l'aide des opérateurs hermitiens

$$\gamma_1 = i\alpha_1\alpha_4, \qquad \gamma_2 = i\alpha_2\alpha_4, \qquad \gamma_3 = i\alpha_3\alpha_4, \qquad \gamma_4 = \alpha_4; \quad (13)$$

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\,\delta_{ik} \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \qquad (13\,a)$$

$$M = M\left(i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\right), \qquad (14)$$

on obtient selon (12 b) et (13) le transformé de charge

$$\overline{\overline{M}} = M\left(-i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, -\gamma_4\right) \qquad (14\,a)$$

par

$$i \to -i, \qquad \gamma_4 \to -\gamma_4. \qquad (14\,b)$$

En exprimant M en fonction des trois opérateurs hermitiens $\check{\gamma}_1$, $\check{\gamma}_2$, $\check{\gamma}_3$ et de l'opérateur anti-hermitien $\check{\gamma}_0$:

$$\left.\begin{aligned} &\check{\gamma}_1 = \gamma_1, \qquad \check{\gamma}_2 = \gamma_2, \qquad \check{\gamma}_3 = \gamma_3, \qquad \check{\gamma}_0 = i\gamma_4; \\ &\check{\gamma}_i\check{\gamma}_k + \check{\gamma}_k\check{\gamma}_i = -2\,g_{ik} \qquad (i = 0, 1, 2, 3); \\ &g_{00} = 1, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \\ &g_{ik} = 0, \qquad (i \neq k); \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

le transformé de charge s'obtient simplement en changeant le signe de l'unité imaginaire i dans l'expression de M, comme (14 b) correspond à $\check{\gamma}_0 \to \check{\gamma}_0$.

$$M = M\left(i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \check{\gamma}_0, \check{\gamma}_1, \check{\gamma}_2, \check{\gamma}_3\right), \qquad (16)$$

$$\overline{\overline{M}} = M\left(-i, x, \frac{\partial}{\partial x}, \check{\gamma}_0, \check{\gamma}_1, \check{\gamma}_2, \check{\gamma}_3\right), \qquad (16\,a)$$

$$i \to -i. \qquad (16\,b)$$

En relation avec cette définition du transformé de charge d'un opérateur qui ne fait pas intervenir la matrice C, on doit noter le procédé de Sommerfeld [7] pour obtenir une solution d'énergie positive de l'équation d'onde d'un positron à partir d'une solution d'énergie négative de l'équation d'onde d'un électron, en exprimant les solutions de l'équation d'onde de Dirac à l'aide des 16 nombres de Clifford γ_i. En remarquant que la transformation (14 b) fait correspondre l'équation de Dirac indépendante du temps dans un champ extérieur avec la valeur $+E$ de l'énergie et $+e$ de la charge d'un positron, à la même équation avec la valeur $-E$ de l'énergie et $-e$ de la charge d'un électron, il conclut qu'on peut obtenir les solutions correspondantes des deux équations, exprimées par les nombres de Clifford γ_i, par la même transformation (14 b).

La distinction (11 a, b) des opérateurs de R avec $M = \overline{\overline{M}}$ ou $M = -\overline{\overline{M}}$ est ainsi également indépendante de la représentation matricielle des α_i. Les opérateurs hermitiens I, x, $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, α_1, $i\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ sont selon (12 a) égaux à leurs transformés de charge, $M = \overline{\overline{M}}$, les opérateurs hermitiens $i\frac{\partial}{\partial x}$, $i\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $i\alpha_2\alpha_3$, α_4 sont opposés aux leurs, $M = -\overline{\overline{M}}$. La définition donnée du transformé de charge des opérateurs est cependant liée à la représentation x, et tandis que dans cette représentation l'opérateur $-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est réel, $i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ contient le

facteur i, dans la représentation p les opérateurs p_x et p_x^2 sont tous les deux réels.

Les relations entre les éléments de matrice des opérateurs hermitiens avec $M = \overline{\overline{M}}$ et $M = -\overline{\overline{M}}$. — En introduisant les projecteurs Λ_+, Λ_- des sous-espaces R_+, R_- de R correspondant au spectre positif et négatif de l'opérateur d'énergie W d'un électron libre

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2}(1 + \Lambda), \qquad \Lambda_- = \frac{1}{2}(1 - \Lambda); \tag{17 a}$$

$$\Lambda = \Lambda_+ - \Lambda_- = \frac{W}{+\sqrt{W^2}}, \qquad \Lambda^2 = 1; \tag{17 b}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \Lambda_+ + \Lambda_- = 1, & \Lambda_+^2 = \Lambda_+, \\ \Lambda_-^2 = \Lambda_-, & \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0; \end{array}\right\} \tag{17 c}$$

chaque opérateur M de R peut être décomposé sous la forme

$$M = \Lambda_+ M \Lambda_+ + \Lambda_- M \Lambda_- + \Lambda_+ M \Lambda_- + \Lambda_- M \Lambda_+. \tag{18}$$

Les deux premiers termes représentent, dans la terminologie de Schrödinger, la partie paire, les deux derniers la partie impaire de l'opérateur M. Les éléments de matrice des quatre termes de cette décomposition sont liés aux conjugués complexes des éléments de matrice correspondants du transformé de charge $\overline{\overline{M}}$. Ceci donne pour des opérateurs hermitiens avec $M = \overline{\overline{M}}$ ou $M = -\overline{\overline{M}}$ des relations simples entre les éléments de matrice des différents termes.

En effet, en écrivant avec $\varphi_r = \varphi_r(x) = \psi_r(x, 0)$ et la relation $\widetilde{C^{-1}} = C^{-1}$ de (8), au lieu de (7)

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_r^* = C\varphi_{r'}, & \varphi_r = \varphi_{r'}^* C^{-1}, \\ \varphi_{r'}^* = C\varphi_r, & \varphi_{r'} = \varphi_r^* C^{-1}, \end{array}\right\} \tag{7*}$$

on a pour ces éléments de matrice

$$\left.\begin{array}{l} (r \mid M \mid s) = \displaystyle\int \varphi_r^* M \varphi_s \,\mathrm{d}^3x = \left(\int \varphi_r M^* \varphi_s^* \,\mathrm{d}^3x\right)^* \\ \qquad = \left(\displaystyle\int \varphi_{r'}^* C^{-1} M^* C \varphi_{s'} \,\mathrm{d}^3x\right)^* = (r' \mid \overline{\overline{M}} \mid s')^*, \\ (r' \mid M \mid s') = (r \mid \overline{\overline{M}} \mid s)^*, \\ (r \mid M \mid s') = \displaystyle\int \varphi_r^* M \varphi_{s'} \,\mathrm{d}^3x = \left(\int \varphi_r M^* \varphi_{s'}^* \,\mathrm{d}^3x\right)^* \\ \qquad = \left(\displaystyle\int \varphi_{r'}^* C^{-1} M^* C \varphi_s \,\mathrm{d}^3x\right)^* = (r' \mid \overline{\overline{M}} \mid s)^*, \\ (r' \mid M \mid s) = (r \mid \overline{\overline{M}} \mid s')^*. \end{array}\right| \tag{19}$$

Ces relations expriment qu'on obtient les conjugués complexes des éléments de matrice du transformé de charge $\overline{\overline{M}}$ à partir des éléments de matrice de M par $r \rightleftharpoons r'$, $s \rightleftharpoons s'$.

Pour un opérateur hermitien les conjugués complexes des éléments de matrices sont égaux aux éléments de matrice transposés,

$$\left(r \mid \overline{\overline{M}} \mid s\right)^* = \left(s \mid \overline{\overline{M}} \mid r\right) \quad \text{si} \quad \overline{\overline{M}} = (\overline{\overline{M}})^+. \tag{20}$$

(19) et (20) donne entre les éléments de matrice d'opérateurs hermitiens M égaux ou opposés à leurs transformés de charge les relations

$$\left.\begin{array}{l} (r' \mid M \mid s') = \pm (s \mid M \mid r), \\ (r \mid M \mid s') = \pm (s \mid M \mid r') \quad \text{pour } M = \pm \overline{\overline{M}},\ M = M^+. \\ (r' \mid M \mid s) = \pm (s' \mid M \mid r). \end{array}\right\} \tag{21}$$

Les éléments de matrice d'un opérateur hermitien avec $M = \overline{\overline{M}}$ sont donc invariant par rapport à l'application répétée de l'opération $r \rightleftharpoons r'$, $s \rightleftharpoons s'$ et d'une transposition, tandis que les éléments de matrice d'un opérateur hermitien avec $M = -\overline{\overline{M}}$ changent de signe pour les mêmes opérations.

Le changement de la relation au transformé de charge à l'aide de l'opérateur Λ. — Comme nous le verrons tout à l'heure, les relations (21) entre les éléments de matrice des opérateurs hermitiens M égaux ou opposés à leurs transformés de charge déterminent la dépendance de l'opérateur $\mathbf{M}$ de la théorie du positron lié à M par la correspondance formelle (3), $M_{rs} = (r \mid M \mid s)$, par rapport au signe de la charge électrique. Pour changer la dépendance de l'opérateur $\mathbf{M}$ par rapport au signe de la charge, nous aurons besoin de coefficients M_{rs} associés à un opérateur de R dont la relation avec son transformé de charge est opposée à celle de M.

La première relation (21) relie les éléments de matrice des deux premiers termes de la décomposition (18) de M et peut être changée en changeant le signe de $\Lambda_- M \Lambda_-$. La seconde relation (21) est une relation intrinsèque entre les éléments de matrice de $\Lambda_+ M \Lambda_-$, ainsi que la troisième entre les éléments de matrice de $\Lambda_- M \Lambda_+$. L'opérateur $\frac{1}{2}(M\Lambda + \Lambda M)$ formé à l'aide de l'opérateur Λ de (17 b) est selon (17 b, c)

$$\begin{aligned} \frac{M\Lambda + \Lambda M}{2} &= \frac{1}{2}\{(\Lambda_+ + \Lambda_-) M (\Lambda_+ - \Lambda_-) \\ &\quad + (\Lambda_+ - \Lambda_-) M (\Lambda_+ + \Lambda_-)\} \\ &= \Lambda_+ M \Lambda_+ - \Lambda_- M \Lambda_- \end{aligned} \tag{22}$$

un opérateur pair,

$$\Lambda_+ \frac{M\Lambda + \Lambda M}{2} \Lambda_- = 0, \qquad \Lambda_- \frac{M\Lambda + \Lambda M}{2} \Lambda_+ = 0. \tag{22 a}$$

Pour M hermitien, $\frac{1}{2}(M\Lambda + \Lambda M)$ est selon (21), (22) opposé, si $M = \overline{\overline{M}}$, ou égale à son transformé de charge, si $M = -\overline{\overline{M}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{M\Lambda + \Lambda M}{2} = \mp \dfrac{\overline{\overline{M\Lambda + \Lambda M}}}{2} \\ \text{pour} \quad M = \pm \overline{\overline{M}}, \quad M = M^+. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Les éléments de matrice de $\frac{1}{2}(M\Lambda + \Lambda M)$ peuvent donc fournir les coefficients nécessaires de l'opérateur $\mathbf{M}$.

Opérateurs de la théorie du positron représentant des quantités changeant de signe avec la charge ou indépendantes de celui-ci. — L'exigence de la symétrie de charge de la théorie du positron est comprise en général dans le sens que les résultats de la théorie doivent être les mêmes en partant au lieu de la représentation sur les états d'électrons d'une représentation sur les états des positrons. Ceci correspond à la conjugaison de charge (7) avec un changement simultané du signe de la charge e partout où celle-ci apparaît explicitement dans l'expression des opérateurs [5, 8, 9].

Bien que cette simple exigeance permette également quelques conclusions élémentaires et importantes [9], pour donner une description du système de particules on doit choisir dès le début une des deux alternatives. En partant des états d'électrons, on obtient ainsi pour les états du système l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$. Il y a cependant une symétrie de charge intrinsèque de la théorie du positron avec un choix défini de l'espace des états du système. Ceci se manifeste par le comportement des opérateurs par rapport au changement de rôle des états d'électrons et de positrons, et ainsi par rapport au changement du signe de la charge électrique.

Les relations (7) font correspondre à chaque état d'électron r de la théorie du positron un état de positron r'. La transformation

$$a_r \rightleftharpoons a_{r'}^*, \qquad a_r^* \rightleftharpoons a_{r'} \tag{24}$$

qui échange les opérateurs de création a_r, $a_{r'}^*$ et les opérateurs d'annihilation a_r^*, $a_{r'}$ des électrons et des positrons correspond à un changement de signe de la charge électrique. Elle transforme chaque opérateur $\mathbf{Z}$ de l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$ en un opérateur $\mathbf{Z}^0$:

$$\mathbf{Z} \rightleftharpoons \mathbf{Z}^0. \tag{24 a}$$

En écrivant

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^0}{2}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathrm{II}} = \frac{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_0}{2}, \qquad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{\mathrm{I}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{II}}, \tag{25}$$

chaque opérateur $\mathbf{Z}$ peut être décomposé en deux opérateurs $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}$ et $\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}$ tels que l'effet de (24) soit

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{I}} \to -\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}, \qquad \mathbf{Z}_{\mathrm{II}} \to \mathbf{Z}_{\mathrm{II}}. \tag{25 a}$$

On peut donc distinguer deux classes d'opérateurs de l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$. Les quantités mesurables de la théorie du positron changeant de signe avec la charge e des particules, comme la charge totale du système ou les composantes de la densité de courant électrique, sont représentées par des opérateurs hermitiens $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}$ changeant de signe par la transformation (24). Les quantités mesurables indépendantes du signe de la charge électrique, comme le moment où le spin du système ou l'énergie d'interaction coulombienne des particules, sont représentées par des opérateurs hermitiens du type $\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}$.

En appliquant la transformation $a_r \rightleftharpoons a_{r'}^*$, $a_r^* \rightleftharpoons a_{r'}$ aux opérateurs $\mathbf{M}$ de (1), (1 a), $\mathbf{M}_{++}$, $\mathbf{M}_{--}$ changent leurs rôles, $\mathbf{M}_{+-}$, $\mathbf{M}_{-+}$ se transforment séparément et, en tenant compte des relations d'anticommutation des a_r, a_r^*, on obtient entre les coefficients des opérateurs $\mathbf{M} \to \mp \mathbf{M}$ changeant de signe avec la charge électrique ou indépendants de ce signe les relations

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M} \to \mp \mathbf{M}, \\ &\mathbf{M}_{++} \to \mp \mathbf{M}_{--}, \qquad \mathbf{M}_{--} \to \mp \mathbf{M}_{++}, \\ &\mathbf{M}_{+-} \to \mp \mathbf{M}_{+-}, \qquad \mathbf{M}_{-+} \to \mp \mathbf{M}_{-+}, \\ &M_{r's'} = \pm M_{sr}, \quad M_{rs'} = \pm M_{sr'}, \quad M_{r's} = \pm M_{s'r}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

La correspondance entre les opérateurs de la théorie d'une seule particule et de la théorie du positron. — En comparant les relations (21) et (26), on voit que la correspondance formelle $M_{\underline{r}\underline{s}} = (\underline{r} \mid M \mid \underline{s})$ de (3) relie à un opérateur hermitien $\overline{\overline{M}} = M$ de R égal à son transformé de charge un opérateur $\mathbf{M}$ de l'espace $\wedge(R_+ + R_-^*)$ des états de la théorie du positron changeant de signe avec la charge électrique, à un opérateur hermitien $M = -\overline{\overline{M}}$ de R opposé à son transformé de charge un opérateur $\mathbf{M}$ de $\wedge(R_+ + R_-^*)$ représentant une quantité indépendante du signe de la charge. Le changement du rôle des espaces R_- et R_-^* entraîne une dépendance par rapport au signe de la charge électrique des opérateurs de la théorie du positron, changeant ainsi l'interprétation physique des opérateurs. L'interprétation de la correspondance $M_{\underline{r}\underline{s}} = (\underline{r} \mid M \mid \underline{s})$ est donnée par la relation indiquée.

Dans le cas des opérateurs hermitiens $M = \overline{\overline{M}}$, cette correspondance change donc un opérateur M ayant une interprétation dynamique (ou cinématique) dans R, en un opérateur $\mathbf{M}$ de $\wedge(R_+ + R_-^*)$ changeant de signe avec la charge (et n'ayant ainsi qu'une interprétation électrodynamique). On peut trouver cependant un opérateur $\mathbf{M}$ de $\wedge(R_+ + R_-^*)$ indépendant de la charge et ayant la même interprétation dynamique pour le système d'électrons et de positrons que la partie paire de M pour une seule particule. Selon (23), cet opérateur est fourni par (1) avec

$$M_{\underline{r}\underline{s}} = \left(\underline{r} \left| \frac{M\Lambda + \Lambda M}{2} \right| \underline{s}\right). \tag{27}$$

Dans le cas de l'exemple (5) de l'opérateur $p^2 = -\hbar^2 \Delta$, cette correspondance donne l'opérateur

$$\sum_r p_r^2 a_r a_r^* + \sum_{r'} p_{r'}^2 a_{r'}^* a_{r'} \tag{5 b}$$

dont le spectre ne contient pas de valeurs négatives et qui multiplié par $\frac{1}{2m}$ peut être interprété comme l'approximation non relativiste de l'énergie cinétique du système de particules.

La correspondance (27) relie, selon (23), à un opérateur hermitien $M = \overline{\overline{M}}$ de R un opérateur **M** de la théorie du positron indépendant du signe de la charge, à un opérateur hermitien $M = -\overline{\overline{M}}$ un opérateur **M** changeant de signe avec celle-ci.

Dans le cas d'une seule particule ce n'est que la partie paire d'un opérateur qui peut avoir une interprétation physique proprement dite, parce que l'interprétation de la partie impaire des opérateurs est liée à la théorie du positron avec un nombre indéterminé de particules. A un opérateur pair, ou à la partie paire d'un opérateur, on peut faire correspondre par (3) ou (27) deux opérateurs **M** de la théorie du positron, l'un indépendant du signe de la charge, l'autre changeant de signe avec elle. Par leur partie impaire les opérateurs de R correspondent selon le sens physique de la correspondance formelle (3) à une dépendance de charge définie des opérateurs de $\wedge (R_+ + R_-^\star)$.

Selon Belinfante [9] certaines expressions de la Mécanique ondulatoire n'ont plus de sens physique après la seconde quantification, dans la théorie du positron. Selon les relations établies on peut donner une interprétation physique à tout opérateur **M** de l'espace $\wedge (R_+ + R_-^\star)$, bien que les opérateurs **M** physiquement importants ne soient pas toujours liés aux opérateurs correspondants M de R par la relation $M_{\underline{r}\underline{s}} = (\underline{r} \mid M \mid \underline{s})$.

Charge totale et nombre de particules. Densité de charge et densité de probabilité. — Étudions encore sur quelques exemples les correspondances (3) et (27). L'opérateur unité I de R est égal à son transformé de charge. (3) lui fait correspondre l'opérateur de la charge totale du système

$$\mathbf{Q} = \sum_r a_r a_r^\star - \sum_{r'} a_{r'}^\star a_{r'}, \tag{28}$$

opérateur qui commute avec tout opérateur **M** de (1). Selon (27) correspond cependant à l'opérateur I de R l'opérateur

$$\mathbf{N} = \sum_r a_r a_r^\star + \sum_{r'} a_{r'}^\star a_{r'} \tag{29}$$

qui représente le nombre de particules du système. **Q** change de signe avec la charge des particules, **N** est indépendant de celle-ci.

A la charge totale **Q** correspond un opérateur de densité de charge, lié par (3) à l'opérateur $\delta(x - x_1)$ de R, qui découle pour $t = 0$ de l'opérateur de la représentation d'interaction [1]

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \sum_{\underline{r}\underline{s}} \psi_{\underline{r}}^\star(x, t)\psi_{\underline{s}}(x, t)\, \overline{a_{\underline{r}} a_{\underline{s}}^\star} \\ &= \Psi_+^\star(x, t)\,\Psi_+(x, t) - \Psi_-(x, t)\,\Psi_-^\star(x, t) \\ &\quad + \Psi_+^\star(x, t)\,\Psi_-(x, t) - \Psi_+(x, t)\,\Psi_-^\star(x, t).\end{aligned} \tag{30}$$

A l'opérateur **N** du nombre de particules appartient également une expression de densité qui représente la densité de probabilité pour qu'on trouve une particule au point x. Cet opérateur de densité est indépendant du signe de la charge des particules et s'obtient à partir de $\delta(x - x_1)$ par la correspondance (27). L'opérateur correspondant de la représentation d'interaction, qui caractérise la variation temporelle de la même quantité pour un système de particules libres, est

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(x, t) &= \sum_{rs} \psi_r^\star(x, t)\psi_s(x, t)\, a_r a_s^\star \\ &\quad + \sum_{r's'} \psi_{s'}^\star(x, t)\psi_{r'}(x, t)\, a_{r'}^\star a_{s'} \\ &= \Psi_+^\star(x, t)\,\Psi_+(x, t) + \Psi_-(x, t)\,\Psi_-^\star(x, t).\end{aligned} \tag{31}$$

Densité de courant électrique et densité de courant de probabilité. — Les opérateurs α_1, α_2, α_3 de R, qui sont égaux à leurs transformés de charge, représentent la vitesse dans la théorie d'une seule particule. Selon (3) leur correspondent dans $\wedge (R_+ + R_-^\star)$ les composantes de l'opérateur

$$\vec{\mathfrak{J}} = \sum_{\underline{r}\underline{s}} \left(\underline{r} \,\middle|\, \vec{\alpha} \,\middle|\, \underline{s}\right) \overline{a_{\underline{r}} a_{\underline{s}}^\star}. \tag{32}$$

C'est un opérateur changeant de signe avec la charge, et il représente le courant électrique résultant du système. L'opérateur de la somme des vitesses des particules s'obtient par (27) et s'écrit avec la base employée pour (4 a), (5 a)

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_r \frac{c\vec{p}_r}{E_r} a_r a_r^\star + \sum_{r'} \frac{c(-\vec{p}_{r'})}{E_{r'}} a_{r'}^\star a_{r'}. \tag{33}$$

avec

$$\frac{\Lambda\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\Lambda}{2} = \frac{c\vec{p}}{E}, \qquad E = +\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

Ce n'est que la partie paire de $\vec{\alpha}$ qui intervient dans l'expression représentant une vitesse dans la théorie du positron, et le tremblement de Schrödinger de la théorie d'un seul électron ne correspond plus dans la théorie du positron à une oscillation de la vitesse des particules, mais à une oscillation du courant électrique due à la création et l'annihilation de paires. Par la même raison, il n'est plus possible dans la théorie du positron d'associer les valeurs

propres $\pm c$ de l'opérateur $c\alpha_i$ avec les valeurs possibles de la vitesse d'un électron.

A l'opérateur (32), et à l'opérateur $\vec{\alpha}\delta(x - x_1)$ de R, correspond dans la représentation d'interaction l'opérateur de la densité de courant électrique

$$\vec{\mathbf{j}}(x, t) = \sum_{\underline{r}\,\underline{s}} \psi^*_{\underline{r}}(x, t)\vec{\alpha}\psi_{\underline{s}}(x, t)\overline{a_{\underline{r}}\, a^*_{\underline{s}}}$$

$$= \Psi^*_+(x, t)\vec{\alpha}\Psi_+(x, t) - \Psi_-(x, t)\Psi^*_-(x, t)\vec{\alpha}$$

$$+ \Psi^*_+\vec{\alpha}\Psi_-(x, t) - \Psi_+(x, t)\Psi^*_-(x, t)\vec{\alpha}. \tag{34}$$

Tandis que l'opérateur (33) de la somme des vitesses des particules ne paraît pas avoir d'intérêt physique, l'expression de densité correspondante, qui s'obtient de $\vec{\alpha}\delta(x - x_1)$ par (27) et qui s'écrit dans la représentation d'interaction

$$\vec{\mathbf{u}}(x, t) = \sum_{rs} \psi^*_r(x, t)\vec{\alpha}\psi_s(x, t)a_r a^*_s$$

$$+ \sum_{r's'} \psi^*_{s'}(x, t)\vec{\alpha}\psi_{r'}(x, t)a^*_{r'}a_{s'}$$

$$= \Psi^*_+(x, t)\vec{\alpha}\Psi_+(x, t) + \Psi_-(x, t)\Psi^*_-(x, t)\vec{\alpha}, \tag{35}$$

représente la densité de courant de probabilité des particules.

Les opérateurs de densité de charge et de courant électrique (30) et (34) de la représentation d'interaction se transforment par une transformation de Lorentz comme les composantes d'un quadrivecteur. Les quatre termes de (30) et de (34) se transforment séparément, et les opérateurs (31) et (35) de la densité de probabilité et du courant de probabilité sont ainsi également les composantes d'un quadrivecteur. Les opérateurs (31), (35) de la représentation d'interaction satisfont aussi l'équation de continuité. Cependant, tandis que pour la densité de charge et de courant électrique l'équation de continuité reste également valable dans la représentation de Heisenberg, en tenant compte de la variation temporelle due aux interactions entre les particules ou à un champ extérieur, à cause de la création et de l'annihilation de paires les opérateurs de densité de probabilité de la représentation de Heisenberg ne satisfont plus l'équation de continuité.

Opérateurs du moment électrique et de la somme des coordonnées. — L'opérateur x de R est égal à son transformé de charge et l'opérateur de $\wedge\,(R_+ + R^*_-)$ correspondant à x selon (3)

$$\Pi = \sum_{rs} (\underline{r}\,|\,x\,|\,\underline{s})\overline{a_{\underline{r}}a^*_{\underline{s}}} \tag{36}$$

est ainsi un opérateur changeant de signe avec la charge. Il ne représente donc pas la somme de coordonnées des particules, mais une composante de la somme des moments électriques. L'opérateur densitaire correspondant,

$$\sum_{rs} x\varphi^*_r(x)\varphi_s(x)a_r a^*_s - \sum_{r's'} x\varphi^*_{s'}(x)\varphi_{r'}(x)a^*_{r'}a_{s'}$$

$$+ \sum_{rs'} x\varphi^*_r(x)\varphi_{s'}(x)a_r a^*_{s'} + \sum_{r's} x\varphi^*_{r'}(x)\varphi_s(x)a_{r'}a^*_s \tag{37}$$

est l'opérateur, dans la représentation de Schrödinger, du moment de la densité de charge par rapport à l'origine.

La somme des coordonnées des particules caractérisant leur distance moyenne à l'origine s'obtient par sommation de l'opérateur densitaire

$$\sum_{rs} x\varphi^*_r(x)\varphi_s(x)a_r a^*_s + \sum_{r's'} x\varphi^*_{s'}(x)\varphi_{r'}(x)a^*_{r'}a_{s'} \tag{38}$$

$$\mathbf{X} = \sum_{rs} (r\,|\,x\,|\,s)a_r a^*_s + \sum_{r's'} (s'\,|\,x\,|\,r')a^*_{r'}a_{s'}. \tag{39}$$

C'est un opérateur indépendant de la charge et lié à x par la correspondance (27).

A une fonction réelle $\varphi(x)$ de x représentant pour un seul électron l'énergie potentielle dans un champ scalaire extérieur correspond également, selon (3), un opérateur changeant de signe avec la charge. C'est le cas aussi pour l'énergie d'interaction $\vec{\alpha}.\vec{A}(x)$ dans un champ $\vec{A}(x)$ extérieur.

L'opérateur défini par le moment de la densité d'énergie pour caractériser le centre de masse dans un système de référence donné [10]

$$\eta = \int d^3x\, \frac{1}{2} \sum_{\underline{r}\,\underline{s}} x \left\{ \varphi^*_{\underline{r}} W \varphi_{\underline{s}} + (W\varphi_{\underline{r}})^* \varphi_{\underline{s}} \right\} \overline{a_{\underline{r}}\, a^*_{\underline{s}}}$$

$$= \sum_{rs} \left(r \,\middle|\, \frac{xW + Wx}{2} \,\middle|\, \underline{s} \right) \overline{a_{\underline{r}}\, a^*_{\underline{s}}} \tag{40}$$

est un opérateur ne dépendant pas du signe de la charge et représentant ainsi une coordonnée d'un point. Dans l'interprétation du point correspondant comme le centre de masse d'un système d'électrons de Dirac on rencontre cependant la difficulté que l'expression de la densité d'énergie d'un paquet d'onde de l'électron de Dirac peut prendre des valeurs négatives.

Les différentes expressions de densité de l'électron de Dirac. — Selon (12 *a*) les opérateurs hermitiens $(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(i\alpha_2\alpha_3\alpha_4, i\alpha_3\alpha_1\alpha_4, i\alpha_1\alpha_2\alpha_4, i\alpha_1\alpha_4, i\alpha_2\alpha_4, i\alpha_3\alpha_4)$ sont égaux à leurs transformés de charge, les opérateurs hermitiens $(i\alpha_2\alpha_3, i\alpha_3\alpha_1, i\alpha_1\alpha_2, i\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, α_4, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ sont opposés aux leurs. Aux dix premiers correspondent selon (3) des quantités mesurables de la théorie du positron changeant de signe avec la charge, aux six derniers

des quantités indépendantes du signe de la charge. Les opérateurs densitaires correspondant aux dix opérateurs dépendant du signe de la charge sont les densités de charge et de courant électrique et les densités de moment magnétique et électrique. Les opérateurs intégrés sur l'espace représentent la charge et le courant électrique total du système, et les moment magnétique et électrique résultants. Les opérateurs densitaires correspondant aux six opérateurs indépendants du signe de la charge sont le quadri-vecteur de densité de spin et les deux invariants de la théorie de l'électron de Dirac.

Les opérateurs densitaires de la représentation d'interaction gardent leur propriété concernant le signe de la charge par rapport à une transformation de Lorentz. En ce qui concerne cependant les opérateurs intégrés, les opérateurs α_i correspondant aux trois composantes du courant électrique total et aux trois composantes du spin résultant se transforment ensemble comme les composantes d'un tenseur antisymétrique du second degré, et cette transformation ne conserve ni la propriété de charge ni l'hermiticité des opérateurs. Ceci montre également le fait, souligné souvent par Louis de Broglie, que ce sont les expressions densitaires de la théorie de l'électron de Dirac, qui ont une signification physique plus fondamentale. Pour obtenir les composantes du spin résultant dans un autre système de référence, on doit tranformer les expressions densitaires et faire l'intégration dans le plan de simultanéité du nouveau système de référence.

A l'aide des opérations $i\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i}\right)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, on peut former à partir des 16 expressions de densité de la représentation d'interaction d'autres expressions de densité dont quelques unes, comme la densité de courant de Gordon ou le tenseur inertique, ont une interprétation physique simple. On peut voir simplement que les 4×16 opérateurs de densité ainsi obtenus ont une dépendance par rapport au signe de la charge contraire à celle des opérateurs à partir desquels ils étaient formés. 4×10 opérateurs sont indépendants du signe de la charge, 4×6 changent de signe avec celle-ci. Les relations différentielles de Franz-Kofink [11], qu'on obtient pour l'électron libre par l'équation de Dirac et qui relient les 16 et 4×16 expressions densitaires, restent également valables dans la théorie d'un système de particules pour les opérateurs densitaires de la représentation d'interaction.

Ces relations peuvent être groupées en deux sous-systèmes, l'un contenant les opérateurs densitaires changeant de signe avec la charge, l'autre les opérateurs indépendants de celle-ci. Cela justifie la classification de Costa de Beauregard [11] qui en partant de ces relations relatives à un seul électron a considéré les deux systèmes d'expressions densitaires et de relations comme électrodynamiques et dynamiques, puisque ceux parmi ces expressions densitaires qui ont une interprétation physique simple connue ont une signification électrodynamique ou dynamique.

Un théorème de symétrie. — La classification (25 *a*) des opérateurs de la théorie du positron permet de formuler un théorème simple de symétrie. En écrivant les termes d'un opérateur $\mathbf{Z}$ de $\wedge (R_+ + R_-^*)$ de façon que les opérateurs de création soient dans chaque terme à la gauche des opérateurs d'annihilation, nous pouvons classer ces termes selon le nombre des facteurs opérateurs de création et d'annihilation. Le premier terme peut être une constante indépendante de ces facteurs. Cette constante additive donne la valeur moyenne d'un opérateur dans un état où il n'y a aucun électron ou positron présent. Pour un opérateur $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}$ de (25 *a*) cette constante doit également changer de signe par la transformation (24) et elle est par conséquent nulle. Une puissance impaire de $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}$, ou le produit d'un nombre impair d'opérateurs $\mathbf{Z}_{\mathrm{I}}$, et d'un nombre quelconque d'opérateurs $\mathbf{Z}_{\mathrm{II}}$ est également un opérateur changeant de signe avec (24); d'où le théorème de symétrie suivant :

La constante additive d'une puissance impaire d'un opérateur changeant de signe avec la charge électrique, ou du produit d'un nombre impair d'opérateurs changeant de signe avec la charge et d'un nombre quelconque d'opérateurs indépendants de ce signe, est égale à zéro.

Ce théorème est très élémentaire, mais il permet des conclusions physiques intéressantes. Le théorème de symétrie de Furry [12] en résulte comme cas spécial.

La solution formelle de l'équation d'onde

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Phi}_t = \mathbf{V}\boldsymbol{\Phi}_t \qquad (41)$$

de la représentation d'interaction,

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \mathbf{U}_t\boldsymbol{\Phi}_t(0), \qquad (41\,a)$$

est déterminée par l'état $\boldsymbol{\Phi}_t(0)$ à l'instant t_0 et par l'opérateur unitaire

$$\mathbf{U}_t = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t}\mathbf{V}(t')\,\mathrm{d}t' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\,\mathbf{V}(t')\mathbf{V}(t'') + \ldots \qquad (42)$$

Les différents termes de $\mathbf{U}_t$ dans le développement (42) correspondent aux différentes approximations du calcul de perturbation. En rangeant les facteurs de façon que les opérateurs de création soient partout à la gauche des opérateurs d'annihilation et en classant les termes des différentes approximations, chaque approximation peut contr

buer au terme constant de $\mathbf{U}_t$ qui représente l'amplitude de transition d'un état à l'instant t_0 ou il n'y a aucun électron ou positron présent au même état à l'instant t. Si l'on suppose que $\mathbf{U}_t$ dépend également des opérateurs de création et d'annihilation des photons, ce terme en dépend aussi et représente les amplitudes de transition entre différents états du champ sans création réelle de paires.

Si $\mathbf{V}$ est un opérateur changeant de signe avec la charge, comme c'est le cas par exemple pour l'énergie d'interaction

$$-\int \mathbf{j}_\nu(x, t) A_\nu(x, t)\, \mathrm{d}^3 x$$

des électrons avec le champ électromagnétique, les produits d'un nombre impair de facteurs $\mathbf{V}(t')$, $\mathbf{V}(t')\,\mathbf{V}(t'')\,\mathbf{V}(t''')$, ..., changent également de signe avec la charge et cette propriété subsiste après l'intégration selon les paramètres de temps t'. Les termes de $\mathbf{U}_t$ correspondant aux approximations d'ordre impair ne contribuent donc pas au terme constant de $\mathbf{U}_t$ et aux amplitudes de transition correspondantes, ce qui est le théorème de symétrie de Furry.

On peut faire aussi la remarque suivante. L'opérateur de l'énergie d'interaction des électrons et du champ électromagnétique et l'opérateur du courant électrique changent de signe avec la charge. Le commutateur du second terme de (42) et du courant électrique est par conséquent dans le cas de cette interaction indépendant du signe de la charge et contient la constante infinie de la polarisation du vide. L'énergie d'interaction coulombienne des particules, ou d'autres opérateurs d'énergie d'interaction directe [13] qui contiennent le facteur e^2, sont indépendants du signe de la charge. Le commutateur correspondant du courant électrique, représentant le changement du courant dans la première approximation, est donc un opérateur changeant de signe avec la charge et il ne contient pas de constante additive. Ce fait ne résoud pas les difficultés liées à la polarisation du vide, mais peut contribuer à la compréhension de ce problème.

C'est pour moi une joie particulière de pouvoir exprimer ici tous mes remerciements à M. Louis de Broglie qui a suivi mon travail avec un intérêt stimulant et m'a assuré auprès de lui à l'Institut Henri Poincaré des possibilités de travail aussi favorables. Je tiens également à remercier M. John A. Wheeler pour de précieuses discussions sur la théorie du positron.

Manuscrit reçu le 22 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE

[1] VALATIN J. G. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 131, 542. Pour des Notes préliminaires concernant le présent travail voir, *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 822, 925.
[2] PAULI W. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1936, **6**, 137.
[3] BROGLIE L. DE. — Une nouvelle conception de la lumière, 1934, Paris.
[4] MAJORANA E. — *Nuov. Cim.*, 1937, **14**, 171.
[5] BELINFANTE F. J. — *Physica*, 1939, **6**, 849.
[6] FURRY W. H. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 56.
[7] SOMMERFELD A. — Atombau und Spektrallinien, II. Bd. 3, Aufl., Braunschweig, 1944, p. 312.
[8] KRAMERS H. A. — *Proc. Ak. Wetensch.*, Amsterdam, 1937, **40**, 814.
[9] BELINFANTE F. J. — *Physica*, 1939, **6**, 870.
[10] MØLLER C. — *Comm. Dublin Inst.*, A, n° **5**, 1949.
[11] BEAUREGARD O. Costa de. — *J. Math.*, 1943, **22**, 154.
[12] FURRY W. H. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 125.
[13] VALATIN J. G. — *C. R. Acad. Soc.*, 1949, **228**, 1283, 1573.

THERMODYNAMIQUE DES EFFETS THERMOMAGNÉTIQUES ET GALVANOMAGNÉTIQUES

Par P. MAZUR et I. PRIGOGINE.

Sommaire. — La thermodynamique des phénomènes irréversibles basée sur les relations d'Onsager. est appliquée à l'étude des effets thermomagnétiques et galvanomagnétiques. On considère uniquement le cas d'un milieu isotrope en absence de champ magnétique. 14 effets transversaux et longitudinaux sont calculés et exprimés à l'aide de six coefficients indépendants seulement. Huit relations générales entre les différents effets sont indiqués.

1. **Position du problème.** — Dans son travail fondamental sur le principe de réversibilité microscopique, Onsager [1] avait déjà indiqué que la relation de Bridgman entre l'effet Nernst et l'effet Ettinghausen devait être une conséquence de son principe. Par la suite, Meixner et Köhler [2, 3], à partir de la théorie électronique des métaux ont vérifié cette relation. Dans un travail récent purement thermodynamique, Callen [4] a montré qu'en effet le principe d'Onsager conduit bien à la relation de Bridgman. La théorie telle qu'elle est développée par Callen permet d'exprimer huit effets thermomagnétiques et galvanomagnétiques à l'aide de six coefficients. Entre ces huit effets, Callen n'a pu trouver qu'une seule relation qui est précisément celle de Bridgman. Callen indique bien qu'au moins une relation supplémentaire doit exister entre ces effets, mais il n'a pu donner cette relation de manière explicite. De plus son formalisme, ainsi que celui de Köhler et de Meixner, ne permet pas de calculer certains effets adiabatiques. Nous nous proposons, dans ce travail, de développer la théorie thermodynamique du problème de telle manière que toutes les relations générales existant entre les effets étudiés puissent être formulées et qu'il soit, en même temps, possible d'obtenir des expressions explicites pour tous les effets adiabatiques.

2. **Production d'entropie.** — Considérons un conducteur se trouvant dans un champ magnétique et supposons qu'il n'y a de flux calorifique et électrique que dans le plan $x - y$. Nous supposerons, en outre, que le champ magnétique est dirigé suivant l'axe z.

Calculons la source d'entropie dans un petit volume de ce conducteur afin de trouver les paramètres conjugués qui nous permettront d'appliquer les relations d'Onsager aux relations phénoménologiques existant entre ces paramètres.

La source d'entropie d'un système de plusieurs constituants en absence de viscosité et de réactions chimiques est donnée de manière générale par [5]

$$T\sigma[S] = \sum_{\gamma, i} \left[F^i_\gamma - \left(\frac{\partial \mu^*_\gamma}{\partial x^i} \right)_T \right] \rho_\gamma \Delta^i_\gamma - \sum_i \mathcal{W}_i \frac{\partial T}{\partial x^i}, \quad (2.1)$$

où la sommation sur γ indique la sommation par rapport aux constituants du système, et la sommation sur i, la sommation par rapport aux coordonnées géométriques.

Les notations sont expliquées dans la table des notations placée à la fin de ce travail. Le système étant en équilibre mécanique, nous avons en outre la relation [5]

$$\sum_\gamma \left[F^i_\gamma - \left(\frac{\partial \mu^*_\gamma}{\partial x^i} \right)_T \right] \rho_\gamma = 0. \quad (2.2)$$

Dans le cas considéré ici, nous avons un système de deux constituants : les ions positifs du réseau cristallin et les électrons libres. La formule (2.2) nous permet alors, par une transformation très simple, d'écrire (2.1) sous la forme

$$T\sigma[S] = \sum_i \left[F^i_e - \left(\frac{\partial \mu^*_e}{\partial x^i} \right)_T \right] \rho_e \omega^i_e - \sum_i \frac{\mathcal{W}_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x^i}, \quad (2.3)$$

où $\vec{\omega}_e$ est la vitesse des électrons par rapport à celle des ions, les autres grandeurs relatives aux électrons étant indiquées par l'indice e que nous n'employerons plus dans la suite.

Supposons maintenant que la force extérieure se réduise à l'action d'un champ électrostatique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{H}$. A pression totale constante, l'expression (2.3) prend la forme

$$T\sigma[S] = \sum_i e E^i C \omega_i - \sum_i \frac{\mathcal{W}_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x^i}, \quad (2.4)$$

où e est la charge élémentaire (par mole) et C la concentration des électrons libres.

Remarquons que l'expression (2.4) ne contient pas explicitement le champ magnétique. En effet

le produit scalaire de la force de Lorentz et du courant est nul.

Établissons des relations linéaires entre les vitesses et les affinités qui les provoquent. Pour la simplification des calculs ultérieurs, nous écrirons ces relations phénoménologiques sous la forme

$$\left.\begin{aligned} eE^i &= \sum_j a_{ij} C\omega_j - \sum_j \frac{b_{ij}}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j},\\ \mathfrak{W}^i &= \sum_j c_{ij} C\omega_j - \sum_j \frac{d_{ij}}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j}. \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

Nous avons donc exprimé les quatre variables eE^x, eE^y, ω_x et ω_y en fonction de quatre variables $C\omega_x$, $C\omega_y$, $\frac{\partial T}{\partial x}$ et $\frac{\partial T}{\partial y}$. Les variables E^i et $\frac{\partial T}{\partial x^i}$ sont des fonctions paires du temps. En effet

$$E^i(t) = E^i(-t),$$
$$\frac{\partial T}{\partial x^i}(t) = \frac{\partial T}{\partial x^i}(-t),$$

par contre, les variables $C\omega_i$ et $\mathfrak{W}^i$ sont des fonctions impaires du temps, c'est-à-dire

$$C\omega_i(t) = -C\omega_i(-t),$$
$$\mathfrak{W}^i(t) = -\mathfrak{W}^i(-t).$$

Ainsi, dans les relations (2.5), une fonction paire du temps est donnée simultanément en fonction de fonctions paires et impaires du temps; de même pour une fonction impaire du temps. Le principe de la réversibilité microscopique s'applique alors sous la forme développée par Casimir [6] et les relations d'Onsager deviennent ici

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}(H) &= a_{ji}(-H),\\ b_{ij}(H) &= -c_{ji}(-H),\\ d_{ij}(H) &= d_{ji}(-H). \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Écrivons maintenant les quatre tenseurs a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} comme somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique

$$X_{ij} = X_{(ij)} + X_{[ij]} \qquad (X = a, b, c, d), \quad (2.7)$$

où $X_{(ij)}$ est un élément du tenseur symétrique et $X_{[ij]}$ un élément du tenseur antisymétrique et étudions le cas particulier d'un conducteur isotrope en l'absence de champs magnétiques. Nous aurons alors

$$X_{(ij)} = X\delta_{ij} \qquad (X = a, b, c, d), \quad (2.7')$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les relations (2.7') expriment que les tenseurs a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} sont invariants pour une rotation dans le plan $x - y$. En tenant compte de (2.6) et de (2.7'), nous avons encore

$$b = -c, \qquad b_{[ij]} = c_{[ij]}. \quad (2.7'')$$

Grâce à (2.7') et (2.7'') les relations (2.5) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} eE^i &= aC\omega_i + a_{[ij]}C\omega_j - \frac{b}{T}\frac{\partial T}{\partial x^i} - \frac{b_{[ij]}}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j}\\ W_i &= -bC\omega_i - b_{[ij]}C\omega_j - \frac{d}{T}\frac{\partial T}{\partial x^i} - \frac{d_{[ij]}}{T}\frac{\partial T}{\partial x^j} \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$
$$(i, j = 1, 2)$$

qui exprime bien l'invariance pour toute rotation autour de l'axe z.

De manière plus explicite, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} eE^x &= a\,C\omega_x + a_{12}C\omega_y - \frac{b}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{b_{12}}{T}\frac{\partial T}{\partial y},\\ eE^y &= -a_{12}C\omega_x - a\,C\omega_y + \frac{b_{12}}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{b}{T}\frac{\partial T}{\partial y},\\ \mathfrak{W}_x &= -b\,C\omega_x - b_{12}C\omega_y - \frac{d}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{d_{12}}{T}\frac{\partial T}{\partial y},\\ \mathfrak{W}_y &= b_{12}C\omega_x - b\,C\omega_y + \frac{d_{12}}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{d}{T}\frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Les quatre relations (2.9) s'expriment ainsi à l'aide de six coefficients seulement.

Comparons maintenant ces relations aux relations phénoménologiques de Callen [4]. En exprimant la source d'entropie d'une autre manière, Callen avait choisi comme flux conjugué du gradient de température, le flux entropique total $\Phi_i[S]$ et comme affinité conjuguée du courant électrique, le gradient du potentiel électrochimique $\frac{\partial\mu}{\partial x^i}$. Entre ces grandeurs et les paramètres que nous avons choisis existent les relations suivantes [4, 5] :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial x^i} &= eE^i + s\frac{\partial T}{\partial x^i},\\ \Phi_i[S] &= \frac{\mathfrak{W}_i}{T} + sC\omega_i, \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

où s est l'entropie spécifique des électrons.

Remarquons qu'en substituant les expressions (2.10) dans les relations (2.9), la symétrie de la matrice des coefficients reste la même.

Pour les effets adiabatiques que nous rencontrerons dans la suite, l'on a toujours $C\omega_i = 0$, i étant la direction dans laquelle le système est isolé adiabatiquement. La condition adiabatique $\Phi_i[S] = 0$ (Callen) est donc équivalente à la condition $\mathfrak{W}_i = 0$. Les relations (2.9) ont l'avantage de nous permettre le calcul direct de la force électrique eE_i et non pas du paramètre $\frac{\partial\mu}{\partial x^i}$ qui contient encore l'entropie des électrons.

Nous allons maintenant appliquer les relations (2.9) à l'étude des différents effets dans le champ magnétique. Nous étudierons successivement les effets transversaux et longitudinaux en employant les définitions données par Gerlach [7]. Certains de ces effets peuvent être mesurés de deux manières

dites « isotherme » ou « adiabatique ». Lors d'une mesure isotherme, le gradient de la température dans la direction y est nul pour un flux calorifique ou électrique primaire dans la direction x. La condition adiabatique s'exprime à l'aide de $\mathfrak{W}_y = 0$, le flux primaire étant dans la direction x.

3. **Effets transversaux.** (Les coefficients des effets transversaux seront caractérisés par l'indice supérieur t.) — *a. Effet Hall isotherme.* — Le coefficient de l'effet Hall isotherme est défini par

$$R_i^t \equiv \frac{E_y}{eHC\,\omega_x}, \tag{3.1}$$

avec les conditions

$$C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{3.1'}$$

Nous obtenons, à partir de la deuxième relation (2.9)

$$R_i^t = -\frac{a_{12}}{e^2 H}. \tag{3.2}$$

b. Effet Hall adiabatique. — Le coefficient de l'effet Hall adiabatique est défini par

$$R_a^t \equiv \frac{E_y}{eHC\,\omega_x} \tag{3.3}$$

et les conditions

$$C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial x} = \mathfrak{W}_y = 0. \tag{3.3'}$$

En éliminant $\frac{\partial T}{\partial y}$ de la deuxième et quatrième équation (2.9), nous obtenons

$$R_a^t = -\frac{1}{e^2 H}\left(a_{12} + \frac{b b_{12}}{d}\right). \tag{3.4}$$

c. Effet Nernst isotherme. — Le coefficient de l'effet Nernst isotherme est défini par

$$Q_i^t \equiv \frac{E_y}{H\frac{\partial T}{\partial x}} \tag{3.5}$$

et les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{3.5'}$$

Nous avons alors, à partir de (2.9)

$$Q_i^t = \frac{b_{12}}{eHT}. \tag{3.6}$$

d. Effet Nernst adiabatique. — Le coefficient de l'effet Nernst adiabatique est défini par

$$Q_a^t \equiv \frac{E_y}{H\frac{\partial T}{\partial x}} \tag{3.7}$$

et les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \mathfrak{W}_y = 0. \tag{3.7'}$$

Nous trouvons à partir de (2.9)

$$Q_a^t = \frac{1}{eHT}\left(b_{12} - \frac{b d_{12}}{d}\right). \tag{3.8}$$

e. Effet Ettinghausen. — Le coefficient de l'effet Ettinghausen est défini par

$$P^t = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{eHC\,\omega_x} \tag{3.9}$$

et les conditions

$$C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial x} = \mathfrak{W}_y = 0). \tag{3.9'}$$

Nous trouvons, à partir de la quatrième équation (2.9)

$$P^t = \frac{T b_{12}}{eHd}. \tag{3.10}$$

f. Effet Leduc Righi. — Le coefficient de l'effet Leduc Righi est défini par

$$S^t = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{H\frac{\partial T}{\partial x}} \tag{3.11}$$

et les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \mathfrak{W}_y = 0. \tag{3.11'}$$

Nous trouvons, à partir de la quatrième équation (2.9)

$$S^t = \frac{d_{12}}{Hd}. \tag{3.12}$$

4. **Effets longitudinaux.** (Les coefficients des effets longitudinaux seront caractérisés par l'indice supérieur l.) — Nous allons, pour les différents effets longitudinaux que nous étudierons, indiquer simplement la définition du coefficient cherché et donner directement le résultat. Celui-ci s'obtient toujours de manière très élémentaire à partir des équations (2.9).

a. Résistance électrique isotherme. — Définition

$$R_i^l \equiv \frac{E_x}{eC\,\omega_x}, \tag{4.1}$$

avec les conditions

$$C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{4.1'}$$

Nous trouvons

$$R_i^l = \frac{a}{e^2}. \tag{4.2}$$

b. Résistance électrique adiabatique. — Définition

$$R_a^l \equiv \frac{E_x}{eC\,\omega_x}, \tag{4.3}$$

avec les conditions

$$C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial x} = \mathcal{W}_y = 0. \qquad (4.3')$$

On obtient

$$R_a^l = \frac{1}{e^2}\left(a - \frac{b_{12}^2}{d}\right). \qquad (4.4)$$

c. Conductibilité thermique isotherme. — Définition :

$$\lambda_l \equiv -\frac{\mathcal{W}_x}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}, \qquad (4.5)$$

avec les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (4.5')$$

D'où

$$\lambda_l = \frac{d}{T}. \qquad (4.6)$$

d. Conductibilité thermique adiabatique. — Définition :

$$\lambda_a = -\frac{\mathcal{W}_x}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}, \qquad (4.7)$$

avec les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \mathcal{W}_y. \qquad (4.7')$$

D'où

$$\lambda_a = \frac{1}{T}\left(d + \frac{d_{12}^2}{d}\right). \qquad (4.8)$$

e. Effet Ettinghausen-Nernst longitudinal isotherme. — Définition du coefficient cherché :

$$Q_l^l \equiv \frac{E_x}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}, \qquad (4.9)$$

avec les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (4.9')$$

D'où

$$Q_l^l = -\frac{b}{eT}. \qquad (4.10)$$

f. Effet Ettinghausen-Nernst longitudinal adiabatique. — Définition du coefficient cherché :

$$Q_a^l \equiv \frac{E_x}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}. \qquad (4.11)$$

avec les conditions

$$C\omega_x = C\omega_y = \mathcal{W}_y = 0. \qquad (4.11')$$

D'où

$$Q_a^l = -\frac{1}{eT}\left(b + \frac{b_{12}d_{12}}{d_{11}}\right). \qquad (4.12)$$

g. Effet Nernst longitudinal isotherme. — Définition du coefficient :

$$P_l^l \equiv \frac{\dfrac{\partial T}{\partial x}}{eC\omega_x}, \qquad (4.13)$$

avec les conditions

$$C\omega_y = \mathcal{W}_x = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (4.13')$$

D'où

$$P_l^l = -\frac{T}{e}\frac{b}{d}. \qquad (4.14)$$

h. Effet Nernst longitudinal adiabatique. — Définition du coefficient :

$$P_a^l \equiv \frac{\dfrac{\partial T}{\partial x}}{eC\omega_x}, \qquad (4.15)$$

avec les conditions

$$C\omega_y = \mathcal{W}_x = \mathcal{W}_y = 0. \qquad (4.15')$$

D'où

$$P_a^l = -\frac{T}{e}\frac{bd + b_{12}d_{12}}{d^2 + d_{12}^2}. \qquad (4.16)$$

5. **Relation entre les effets thermomagnétiques et galvanomagnétiques.** — Dans les deux paragraphes précédents, nous avons exprimé 14 effets expérimentaux à l'aide de six coefficients. Nous devons donc trouver huit relations entre des 14 effets expérimentaux.

Grâce à (3.6), (3.10) et (4.6) nous avons tout d'abord

$$\lambda_l P^t = TQ_l^t. \qquad (5.1)$$

C'est la relation de Bridgman.

Indiquons encore deux relations du même type.

Grâce à (4.6), (4.10) et (4.14) nous trouvons pour les effets longitudinaux isothermes

$$\lambda_l P_l^l = TQ_l^l, \qquad (5.2)$$

et à partir de (4.8), (4.12) et (4.16) pour les effets longitudinaux adiabatiques

$$\lambda_a P_a^l = TQ_a^l. \qquad (5.3)$$

Les trois relations (5.1), (5.2) et (5.3) sont des conséquences des relations de symétrie d'Onsager.

A côté de ces relations, nous trouvons des relations d'un autre type dues à l'isotropie du système en absence d'un champ magnétique.

En vertu de (4.2), (4.4), (3.6) et (3.10) nous avons

$$R_a^l - R_l^l = -H^2 Q_l^t P^t. \qquad (5.4)$$

De même, à cause de (3.12), (4.6) et (4.8)

$$\lambda_a - \lambda_l = H^2\frac{(S^t)^2}{\lambda_l}. \qquad (5.5)$$

Les relations (5.4) et (5.5) sont les relations supplémentaires existant entre les huit effets traités par Callen mais qu'il n'avait pas pu formuler explicitement. Comme il l'avait prévu, pour un champ magnétique évanescent, ces relations deviennent

$$R^l_a - R^l_i = 0, \qquad \lambda_a - \lambda_i = 0. \tag{5.5'}$$

A partir de (3.2), (3.4), (3.10) et (4.10) nous trouvons encore

$$R^t_a - R^t_i = H^2 Q^l_i P^t. \tag{5.6}$$

De même à partir de (3.6), (3.8), (3.12) et (4.10) on a

$$Q^t_a - Q^t_i = H^2 Q^l_i S^t. \tag{5.7}$$

Les relations (5.6) et (5.7) avaient déjà été indiquées par Heurlinger [8].

Finalement, nous avons, en vertu de (3.6), (3.12), (4.10) et (4.12)

$$Q^l_a - Q^l_i = - H^2 Q^t_i S^t. \tag{5.8}$$

Les relations (5.1) à (5.8) sont les huit relations cherchées entre les 14 effets que nous avons étudiés.

Notons aussi que les formules (5.4) et (5.5) expriment, en outre, que la résistance électrique adiabatique est plus petite que la résistance électrique isotherme et que la conductibilité thermique adiabatique est plus grande que la conductibilité adiabatique isotherme, en accord avec les résultats obtenus par Meixner et Köhler.

Cette étude pourrait être facilement étendue au cas de substances anisotropes.

Ce travail a pu être réalisé grâce à un subside du Fond National belge de la Recherche scientifique.

Table des notations.

- $\vec{E}$, champ électrique;
- $\vec{F}_\gamma$, force extérieure par unité de masse agissant sur le constituant γ;
- μ_γ, potentiel chimique massique du constituant γ;
- $\vec{\Delta}$, vecteur de diffusion du constituant γ

$$\left(\vec{\Delta}_\gamma = \vec{\omega}_\gamma - \frac{\sum_\gamma \rho_\gamma \vec{\omega}_\gamma}{\sum_\gamma \rho_\gamma} \right);$$

- $\vec{\omega}_\gamma$, vitesse du constituant γ;
- ρ_γ, densité du constituant γ;
- $\vec{\mathcal{W}}$, flux calorifique total moins le flux calorifique dû à la diffusion [5];
- C_γ, concentration molaire du constituant γ;
- $\sigma[S]$, source d'entropie;
- s_γ, entropie spécifique molaire du constituant γ;
- $\vec{\Phi}[S]$, flux entropique.

Manuscrit reçu le 23 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Onsager L. — *Phys. Rev.*, 1931, **37**, 705; 1931, **38**, 265.
[2] Meixner J. — *Ann. Physik*, 1939, **36**, 105; *Ann. Physik*, 1939, **35**, 701; *Ann. Physik*, 1941, **10**, 165.
[3] Köhler M. — *Ann. Physik*, 1941, **10**, 196; *Ann. Physik*, 1941, **40**, 601; *Z. Physik*, 1941, **118**, 37; 1941, **118**, 312.
[4] Callen H. B. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 1349.
[5] Prigognie I. — Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles, Ed. Desoer, Liége, 1947, Chap. IX.
[6] Casimir H. B. G. — *Rev. Mod. Phys.*, 1945, **17**, 343.
[7] Gerlach W. — *Handbuch der Physik*, **13**, Chap. 6.
[8] Heurlinger T. — *Ann. Physik*, 1915, **48**, 84.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

SPECTROMÉTRIE DES RAYONS β ET γ DES CORPS RADIOACTIFS ARTIFICIELS

Par NADINE MARTY,
Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.

Sommaire. — Après avoir rappelé les principaux types d'appareils utilisés en spectrométrie β en insistant sur le problème des compteurs et des dépôts de source, on décrit les méthodes de détermination de la forme des spectres simples, des énergies et intensités des raies γ et des électrons de conversion et enfin l'établissement des schémas de niveau des éléments formés par radioactivité β; dans le premier cas surtout, on donne les derniers résultats obtenus.

Introduction. — L'une des méthodes les plus généralement utilisées jusqu'à présent pour déterminer les niveaux d'énergie des noyaux, consiste à mesurer l'énergie et l'intensité des spectres β et des rayonnements γ émis par les corps radioactifs artificiels.

Si le noyau ${}^{A}_{Z}N$ se désintègre par émission β pour donner le noyau ${}_{Z+1}^{A}N$, le schéma de niveau de ce dernier peut être représenté suivant la figure 1 où β_1, β_2, β_3 sont les composantes du spectre β complexe dont les énergies maxima sont respectivement $E_4 - E_1$, $E_4 - E_2$, $E_4 - E_3$ et γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6 sont les photons émis lors du passage du noyau ${}_{Z+1}^{A}N$ d'un des états excités E_1, E_2, E_3 à son état fondamental E_0.

La forme du spectre β s'obtient directement en comptant le nombre d'électrons émis dans un intervalle donné d'énergie en fonction de leur énergie; une autre représentation très fréquemment utilisée, consiste à porter le nombre d'électrons émis par intervalle de quantité de mouvement en fonction de leur quantité de mouvement, la grandeur $B\rho$ (B, valeur de l'induction uniforme du milieu dans lequel la trajectoire de l'électron est courbée; ρ, son rayon de courbure) étant, pour un électron, proportionnelle à mv. Si des raies d'électrons existent, elles apparaissent lors de l'étude du spectre β. Les photons γ sont mesurés indirectement par les électrons secondaires (compton et photoélectriques) qu'ils produisent dans un radiateur.

La méthode spectrométrique n'a cessé de se développer depuis 10 ans et pour être complet il nous faudrait citer plusieurs milliers de travaux : les valeurs numériques des énergies β et γ ainsi obtenues se trouvent dans les tables de Seaborg et de Mattauch; des revues d'ensemble ont paru sur les différentes questions que nous aborderons, dues à Mitchell [1] qui donne les schémas de désintégration des corps les mieux étudiés, à Hine [2] sur la spectrométrie β et γ (*).

(*) *Note sur épreuve* — Deux articles très complets viennent de paraître; l'un de Persico et Geoffrion [73] étudie théoriquement et décrit les principaux types de spectroscopes (spectromètres et spectrographes), l'autre de Wu [74] se rapporte aux formes de spectres β simples permis et interdits.

Le but de cet article est de citer les principaux types d'appareils qui ont été réalisés jusqu'à présent (1) en indiquant leurs caractéristiques essentielles, accompagnées de références bibliographiques permettant de se rapporter aux travaux originaux pour les détails de construction; nous avons étudié séparément la question des sources radioactives et

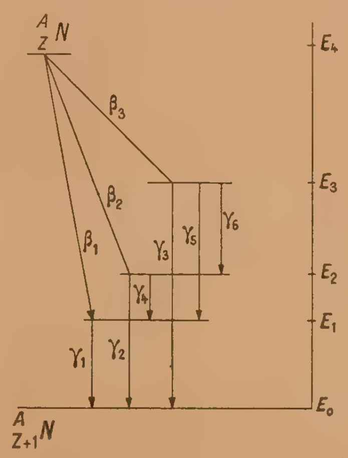


Fig. 1. — Schéma de niveau du noyau ${}_{Z+1}^{A}N$.

des compteurs, qui se pose dans presque toutes les études spectrométriques. Enfin nous avons envisagé les principaux types de problèmes étudiés : forme des spectres simples, raies γ et raies de conversion, établissement des schémas de niveau, en nous basant dans chaque cas sur un ou deux exemples concrets.

I. — Différents types d'appareils.

Le premier spectromètre, appareil à focalisation semi-circulaire, fut construit par Danyscz en 1913; le principe en est le suivant : un électron placé dans

(1) Notre bibliographie s'arrête en juin 1950.

un champ magnétique uniforme normal à sa direction d'émission décrit une trajectoire circulaire dans un plan perpendiculaire aux lignes de force, de rayon ρ tel que $B\rho = \frac{mv}{e}$, où B est l'induction magnétique uniforme, m la masse de l'électron, e sa charge et v sa vitesse.

1. Spectromètres à focalisation semi-circulaire (*fig.* 2). — On peut distinguer deux types principaux d'appareils. Le premier est muni d'un aimant permanent, le champ est fixé, on recueille des particules d'énergie différente suivant le rayon de courbure de leur trajectoire, le système de détection habituel est la plaque photographique; ce dispositif est surtout utilisé pour l'étude des raies de conversion dont la position peut être déterminée avec une grande précision; ces spectromètres nécessitent des sources à grosse activité spécifique et des poses longues, longtemps réservés à la radioactivité naturelle, leur emploi en radioactivité artificielle ne cesse de croître

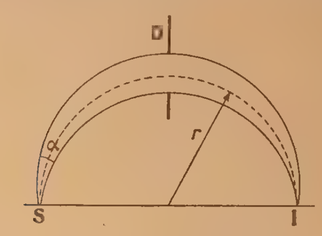


Fig. 2. — Trajectoires des électrons dans un spectromètre à focalisation semi-circulaire.

depuis que les piles fournissent des produits à activité spécifique comparable à celles de la radioactivité naturelle. Parmi les mesures faites dernièrement avec cette méthode citons celles de Hill [3], Cork [4], Cranberg [5].

Le deuxième type d'appareils utilise le champ variable fourni par un électroaimant, les trajectoires des électrons ont un rayon de courbure constant, le système de détection habituel est un compteur Geiger-Müller en bout ou deux compteurs en coïncidence; ces spectromètres de petites dimensions ont en général un bon pouvoir de résolution de l'ordre de 1 pour 100 mais un angle solide utilisable faible; ils servent à l'étude de la forme des spectres et à celle des rayons γ par leurs électrons secondaires; dans ce cas comme dans le précédent, la production de sources radioactives artificielles à grosse activité spécifique, leur a donné un nouvel intérêt, mais quelques inconvénients leur restent : faible distance source-compteurs qui rend difficile l'élimination de l'action des γ directs sur les compteurs, petites dimensions de la source, de forme rectangulaire.

Différents auteurs ont utilisé récemment ce genre d'appareils, Hey et Latishev [6], Kurie et Ter Pogossian [7], Saxon [8], Lévy et Greuling [9], Marty [10].

L'étude de la focalisation semi-circulaire qui avait donné lieu à un grand nombre de travaux avant 1939, a été reprise dernièrement par Owen [11] d'une part, Fowler, Schreffler et Cork [12] d'autre part qui donnent la forme d'une raie en fonction des dimensions de la source et de la fenêtre de sortie par rapport au rayon de courbure, et des dimensions du diaphragme : on a intérêt à avoir mêmes dimensions de source et de fenêtre, la hauteur de celles-ci étant grande devant leur largeur.

Langer et Cook [13] ont construit un spectromètre à focalisation semi-circulaire de 40 cm de rayon de courbure; ils ont pu obtenir un facteur de transmission

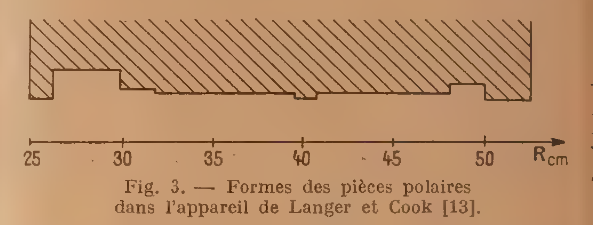


Fig. 3. — Formes des pièces polaires dans l'appareil de Langer et Cook [13].

de 1 pour 100 tout en conservant un bon pouvoir de résolution (0,5 pour 100) en utilisant au lieu de pièces polaires à faces planes, des pièces polaires présentant la forme indiquée sur la figure 3; le champ ainsi obtenu focalisait des électrons émis sous un angle relativement grand par rapport à la normale au plan de la source. Un appareil basé sur un principe analogue a été réalisé par Bruner et Scott [13 *bis*].

2. Spectromètre à focalisation axiale (*fig.* 4). — Un très grand nombre de types et de modèles en ont été construits depuis 10 ans; tous ayant un champ à symétrie cylindrique donnent suivant les principes de l'optique électronique d'un objet situé sur l'axe une image située sur l'axe, ils diffèrent par la variation radiale du champ et par la façon dont ce champ est obtenu.

Tous ces appareils permettent de travailler avec

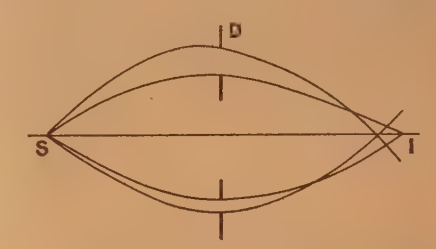


Fig. 4. — Trajectoire des électrons dans un spectromètre à focalisation axiale.

des sources circulaires de grandes dimensions, ils ont un angle solide utilisable grand et les compteurs étant situés loin de la source, les photons énergiques que celle-ci peut émettre sont absorbés par des écrans épais de plomb. Par contre ils nécessitent un système de diaphragmes spéciaux en forme d'hélice pour séparer les électrons positifs des électrons négatifs.

a. Spectromètre solénoïdal. — Le champ uniforme à symétrie axiale est créé par une bobine de dimensions supérieures à celles de la chambre, les trajectoires sont des hélices circulaires, le premier appareil de ce type a été construit par Witcher [14] qui a donné une étude

de sa focalisation. Wu, Havens et Albert [15] ont utilisé ce spectromètre modifié pour l'étude de la forme des spectres aux basses énergies. La théorie en a été complétée dernièrement par Persico [16].

b. Spectromètre à lentille magnétique. — Un spectromètre à lentille mince a été décrit et étudié pour la première fois par Deutsch, Elliot et Evans [17]; le champ magnétique y est produit par une bobine de faible longueur devant celle de l'appareil (16 cm pour une chambre de 1 et même 2 m); la forme des trajectoires et la focalisation ne sont plus alors exactement calculables en tout point; ces instruments ont l'avantage de ne pas nécessiter de grandes bobines ni de fortes intensités de courant; la position de la source et des compteurs en dehors des bobines les rend facilement accessibles. Plusieurs appareils ont ensuite été construits sur ce principe, citons ceux de Quade et Halliday [18] Miller et Curtis [19], Kern, Zaffarano et Mitchell [20].

Un spectromètre à double lentille magnétique a été construit par Agnew et Anderson [21], la source se trouvant au centre de l'une des lentilles minces (10 cm d'épaisseur) et le compteur au milieu de l'autre, distante de la première de 95 cm.

En même temps que Deutsch aux U. S. A. Siegbahn à Stockholm mettait au point un *spectromètre à lentille épaisse*; plusieurs modèles ont été construits successivement [22], leur caractéristique en est le champ fourni par un électroaimant comportant une importante masse de fer, la forme des pièces polaires munies d'extrémités mobiles a été adaptée expérimentalement pour diminuer les aberrations; ni le champ ni les trajectoires ne sont ici exactement calculables.

Un appareil de ce genre vient d'être achevé par Hubert au Laboratoire de Synthèse atomique d'Ivry.

3. Spectromètre à double focalisation (*fig.* 5). — Le premier appareil de ce genre, modèle d'essai de petite dimension a été construit par l'équipe de Stockholm [23]. Le champ magnétique créé par un électroaimant comporte un plan de symétrie comme dans le spectromètre à focalisation semi-circulaire et un axe de symétrie normal à ce plan; on retrouve donc additionnées les propriétés de focalisation des types [1] et [2] d'appareils précédemment décrits, l'objet et l'image situés dans le plan de symétrie sont à une distance angulaire de $\pi\sqrt{2}$. Avec un appareil de 2 tonnes, Siegbahn a pu obtenir un pouvoir de résolution de quelques pour-mille pour un angle solide de 1 pour 100.

Des spectromètres basés sur le même principe ont été construits par Kurie, Osoba et Slack [24] et par Shull et Dennison [25]. Des études ont été faites par Judd [66] pour placer la source et le collecteur en dehors du champ magnétique et par Rosenblum [67] qui utilise un champ magnétique annulaire variant en $r^{\frac{1}{2}}$.

En dehors de ces appareils maintenant classiques quelques spectromètres tout à fait différents ont été construits pour des études particulières.

Backus [26] a réalisé un petit spectromètre électrostatique utilisant l'action focalisatrice du champ électrique produit en plaçant des conducteurs cylindriques à des potentiels différents; son but était l'étude du début des spectres (électrons de 5 à 50 keV).

Enfin Du Mond [27] a étendu à l'étude des rayons γ que l'on peut obtenir avec une très forte intensité l'utilisation du spectromètre à cristal courbe jusqu'à présent limitée à l'étude des rayons X; il a ainsi pu donner dans un nombre restreint de cas [28] des énergies de rayons γ à 1/2 000e près, précision rarement obtenue dans le domaine de la Physique nucléaire.

Des calculs théoriques et un essai préliminaire ont été faits par Kofoed-Hansen, Lindhard et Nielsen [69] pour un spectromètre à symétrie axiale avec des pièces polaires composées de plusieurs secteurs devant permettre d'atteindre des angles solides de 20 pour 100 avec un bon pouvoir de résolution.

Enfin bien que nettement différents des appareils précédents, citons le limegraphe de Siegbahn et

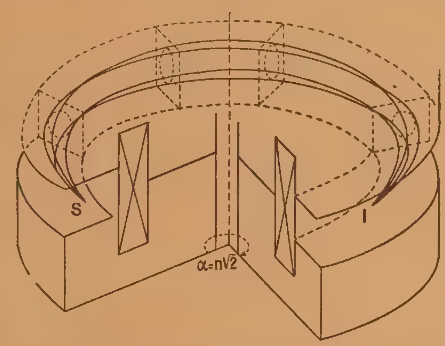


Fig. 5. — Trajectoire des électrons dans un spectromètre à double focalisation [23].

Slatis [70] et le spectromètre de Rae [71] où la source est placée dans un champ magnétique uniforme au centre d'un compteur toroïdal ou annulaire; on peut ainsi avoir de très grands angles solides mais l'on n'obtient pas la forme exacte des spectres. Ces appareils sont surtout utiles pour déterminer l'énergie maxima d'un spectre ou pour des études de coïncidences β — γ.

4. Méthode des coïncidences en spectrométrie. — Comme nous le verrons par la suite, il est nécessaire dans un grand nombre de cas, pour pouvoir établir avec plus de certitude les schémas de niveau des éléments, de déterminer quels sont les rayons β et γ émis en cascade, donnée que seules les méthodes de coïncidences permettent d'atteindre. On a ainsi été amené à étudier les coïncidences, entre les différentes portions d'un spectre (mesuré avec un spectromètre) et les γ détectés avec un compteur placé juste derrière la source; mais l'efficacité du comptage des photons et des mesures en coïncidence étant toujours très faible, il faut un spectromètre à très grand angle solide et des sources très intenses [30].

Feather [29] étudia les coïncidences entre les spectres β et des raies de conversion à l'aide d'un double spectromètre (*fig.* 6) où l'on focalise simultanément les électrons émis vers l'avant et l'arrière

de la source, la position des compteurs est variable, leur fenêtre d'entrée restant toujours dans le plan de la source.

Katz, Hill et Goldhaber [31] ont utilisé une méthode voisine pour étudier les coïncidences entre raies de

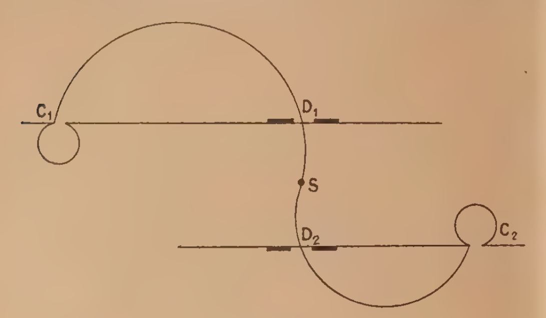


Fig. 6. — Double spectromètre de Feather [30].

conversion, mais avec un spectromètre à focalisation semi-circulaire habituel et deux compteurs à position variable.

II. — Les sources et les compteurs.

Deux problèmes sont communs à presque toutes les expériences en spectrométrie β : la fabrication de compteurs à fenêtre très mince n'absorbant pas les électrons mous, et la fabrication de sources radioactives et de supports aussi très minces qui limitent les effets de diffusion et de réflexion.

Les feuilles minces. — Les feuilles minces utilisées comme fenêtres et comme supports sont du même genre bien qu'elles nécessitent des propriétés un peu différentes : pour les compteurs elles doivent pouvoir supporter des différences de pression de l'ordre de 10 cm de mercure et cependant ne pas laisser diffuser le mélange gazeux du compteur vers la chambre du spectromètre. Pour le dépôt des sources elles doivent pouvoir être chauffées ou résister à l'action de produits chimiques, acides ou bases plus ou moins concentrés.

On a utilisé des feuilles de mica, finement clivées, des feuilles minces d'aluminium, mais le numéro atomique intervenant beaucoup dans les phénomènes de diffusion et d'absorption, on ne se sert actuellement presque exclusivement que de produits organiques composés d'oxygène, hydrogène et carbone; nous ne citerons ici que les plus communs avec, si possible une référence bibliographique indiquant une méthode de préparation :

Acétate de cellulose [32], collodion [26], zaponlak [13], formvar, nylon [33].

Des mesures comparées de résistance à la rupture pour les différentes sortes de feuilles minces utilisées en spectrographie ont été faites par Chen [72].

La mesure exacte des épaisseurs de ces feuilles qui ont jusqu'à quelques microgrammes pour les supports de source, et quelques dizaines de microgrammes pour les fenêtres de compteurs, est très délicate et nécessite l'utilisation de méthodes interférométriques.

Toutes ces matières organiques sont des isolants; on a remarqué que les compteurs étaient plus stables si les feuilles minces qui ferment les fenêtres sont conductrices; ceci a été obtenu soit par évaporation thermique d'aluminium [10] soit par dépôt d'argent [26] en couche invisible.

Il est aussi nécessaire de rendre les supports de source conducteurs car sans cela lors de l'émission d'électrons, la source se porte à un certain potentiel et l'on observe une déformation du spectre aux basses énergies et un déplacement des raies de conversion; on peut soit métalliser les feuilles minces, soit suivant un procédé indiqué par Langer [35] y incorporer de l'aquadag ou placer un cheveu très fin en travers de la feuille.

Les compteurs. — Quand le spectromètre est monté avec deux compteurs en coïncidence, ceux-ci sont munis de fenêtres latérales fermées par les feuilles minces, sinon le compteur est utilisé en compteur cloche. Si la fenêtre est de petites dimensions, elle peut être montée sans support; dans les spectromètres à focalisation axiale où les fenêtres sont circulaires et ont jusqu'à 2 cm de diamètre, il faut souvent les supporter par des grilles, le problème du rapport des pleins et des vides se pose alors et la diffusion des électrons mous par les grilles [13, 36]. Dans certains cas on a cherché à accélérer les électrons pour leur faire traverser la paroi du compteur [13, 21] mais cela peut entraîner des impulsions parasites.

Le remplissage des compteurs se fait en place sur le spectromètre pour que les feuilles n'aient pas à supporter de grandes différences de pression; lorsque la fenêtre est très mince et laisse légèrement diffuser le mélange gazeux, on peut utiliser un récipient de grand volume rempli de ce mélange, en communication avec le compteur et jouant le rôle de stabilisateur, ou un régulateur de pression tel qu'il a été décrit par Ter Pogossian et col. [37].

Un compteur sans fenêtres a été utilisé par Langer, Motz et Price [36] pour l'étude d'électrons de moins de 8 keV.

Dépôt des sources. — Le problème est de déposer en une couche la plus mince possible et régulière (quelques dizaines de microgrammes) des sources à très grosse activité spécifique; chaque cas demande une solution particulière, cependant nous pouvons citer la méthode ne Langer [35] qui dépose une goutte de solution d'insuline sur la surface qui doit être recouverte par le produit actif et obtient ainsi un étalement régulier de la solution; mais même dans ce cas, on ne peut parler d'épaisseur constante car des cristaux se forment de différentes grosseurs et la valeur moyenne de la densité des sources donnée habituellement n'a plus alors grand sens; les résultats les plus sûrs ont été obtenus par évaporation thermique [38].

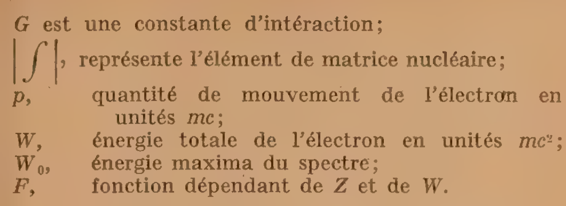
La question est tout à fait différente pour des produits gazeux et a été traitée dernièrement par Brown et Perez-Mendez [39].

III. — Étude de la forme des spectres simples.

L'étude des formes de spectres simples et leur comparaison avec la théorie constitue le test principal des hypothèses faites en radioactivité β : existence et masse du neutrino, spectres permis et interdits de différents ordres, choix des formes d'opérateurs, etc., nous renverrons pour les questions théoriques à l'exposé d'ensemble de Konopinski [40], nous contentant de rappeler la formule qui donne la probabilité d'émission d'un électron d'énergie comprise entre W et $W + \mathrm{d}W$

$$P\,\mathrm{d}W = \frac{G^2\left|\int\right|^2}{2\pi^3} F(Z, W)p\,W(W_0 - W)^2\,\mathrm{d}W,$$

où



G est une constante d'intéraction;

$\left|\int\right|$, représente l'élément de matrice nucléaire;

p, quantité de mouvement de l'électron en unités mc;

W, énergie totale de l'électron en unités mc^2;

W_0, énergie maxima du spectre;

F, fonction dépendant de Z et de W.

Une méthode facile pour comparer la théorie à l'expérience, indiquée par Kurie, Richardson et Paxton, consiste à porter en fonction de W la quantité $\left(\frac{N/w}{Fp\,W}\right)^{\frac{1}{2}}$, où N/w est le nombre expérimental

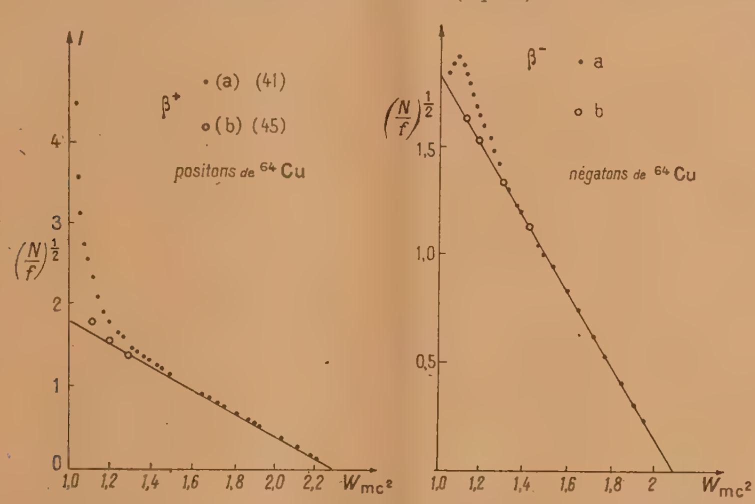


Fig. 7. — Droites de Fermi données par Cook et Langer [41], Owen et Cook [45]. Cas du ^{64}Cu.

d'électrons émis par unité d'énergie si N est le nombre d'impulsions au compteur. Si le spectre est permis, l'élément de matrice est constant et l'on doit obtenir une droite. Si le spectre est interdit, on obtient soit une droite, soit une courbe qui peut être ramenée à une droite par multiplication par un facteur de correction qui dépend du degré d'interdiction et de la forme d'interaction adoptée.

D'autre part la valeur numérique du produit ft, où f est $\int_1^{W_0} \mathrm{d}W\; Wp\,(W_0 - W)^2\,F\,(Z, W)$ et t la période de la désintégration β permet de classer les différents spectres par ordre d'interdiction.

Encore récemment des mesures soignées semblaient indiquer un désaccord entre la théorie et l'expérience dans le cas des spectres permis, les résultats expérimentaux donnant un excédent d'électrons de faible énergie; le désaccord apparaissait suivant les auteurs et les éléments à partir de 200, 100 et 50 keV, mais on s'aperçut peu à peu de l'importance qu'avait l'épaisseur du support et de la source elle-même dans ces mesures. Nous donnerons comme exemple les travaux faits sur ^{64}Cu.

Après Backus [26], Cook et Langer [41] étudièrent avec leur spectromètre à focalisation semi-circulaire et champ inhomogène, la forme des spectres β^+ et β^- émis par ^{64}Cu et tout particulièrement la région des basses énergies; deux sortes de compteurs furent utilisés l'un avec des fenêtres de mica de 2,4 mg : cm² modifiant la forme du spectre à partir de 150 kV, l'autre avec une fenêtre de Zaponlak qui absorbait les électrons de 2 keV et était supposée ne pas modifier la distribution d'électrons de plus de 10 keV; les sources étaient préparées en déposant entre deux feuilles minces de Zaponlak de 0,01 mg : cm² des microgouttes de solution de nitrate de cuivre, le poids moyen des sources variant de 0,1 à 0,35 mg : cm². Leurs résultats indiquaient un excès d'électrons mous à partir de 270 keV pour les positons, de 190 keV pour les négatons, et cela indépendamment des fenêtres de compteurs et des sources utilisées, ils conclurent à un désaccord avec la théorie de Fermi, aux basses énergies dans les cas d'émission β^+ et β^- (*fig.* 7 *a*).

Wu et Albert [42] reprirent cette étude avec le spectromètre solénoïdal précédemment cité, les fenêtres des compteurs avaient de 20 à 25 μg : cm² et les sources étaient obtenues par dépôt sur des feuilles de collodion de 4 μg : cm² de suspensions de Cu(OH)$_2$ colloïdal; ils comparent les résultats

expérimentaux aux valeurs théoriques en tenant compte de l'effet d'écran dû aux électrons atomiques signalé par Longmire et Brown [43]. L'excès de négatons n'apparaissait plus qu'au-dessous de 70 keV, l'excès de positons dès 200 keV, la diffusion jouant beaucoup plus pour ces derniers étant donné le faible nombre d'électrons positifs mous. Les auteurs concluaient à l'accord probable de la théorie et de l'expérience étant donné le rôle important de l'épaisseur des sources.

Langer, Moffat et Price [44] d'une part, Owen et Cook [45] d'autre part, firent de nouvelles expériences avec des sources uniformes de Cu déposées par évaporation thermique, d'épaisseur 5μ g : cm² sur support de 15μ g : cm² et des fenêtres de compteurs de 6μ g : cm², l'écart avec la théorie n'apparaissait plus que pour des électrons d'énergie inférieure à 50 kV. Les auteurs conclurent aussi à un accord entre la théorie et l'expérience (*fig.* 7 *b*). Owen et Primakoff [68] indiquent une méthode qui permet de corriger la forme de spectres obtenus avec une source épaisse d'après la forme que donne à une raie d'électrons de conversion une source de même épaisseur, et les résultats qu'ils obtiennent viennent eux aussi à l'appui de la théorie de Fermi.

Par contre dans le cas de ^{61}Cu, considéré comme ayant un spectre β^+ simple pour lequel Cook et Langer [46] signalaient un écart avec la théorie à partir de 500 keV, Boehm et col. [47] ayant trouvé des rayons γ conclurent à l'existence possible d'un deuxième spectre d'énergie maxima 0,553 MeV qui expliquait l'écart signalé précédemment.

Si dans certains cas [32] des spectres classés comme interdits ont des formes analogues à celles de transitions permises, on a, ces dernières années, étudié par la méthode spectrométrique des spectres simples présentant nettement la forme de transitions interdites et déterminé le type d'interaction qui entraînait le meilleur accord entre les valeurs théoriques et expérimentales. Des résultats très nets ont été obtenus par Langer et Price [48] dans le cas de ^{91}Y. La courbe obtenue en portant $\left(\frac{N/w}{pWF}\right)^{\frac{1}{2}}$ en fonction de W montre une concavité vers l'axe des énergies (*fig.* 8*a*) la transition est classée d'après la valeur de ft comme une fois interdite avec les régles de sélections de Gamow-Teller, le facteur de correction à appliquer dans ce cas pour retrouver la forme des spectres permis est unique : $A = (W^2 - 1) + (W_0 - W)^2$. La figure 8 *b* montre la droite obtenue lorsque l'on divise par A les ordonnées de 8 *a*. D'autres cas comme ceux de ^{89}Sr, ^{90}Sr, ^{90}Y [49, 50, 51, 52] sont aussi très nets.

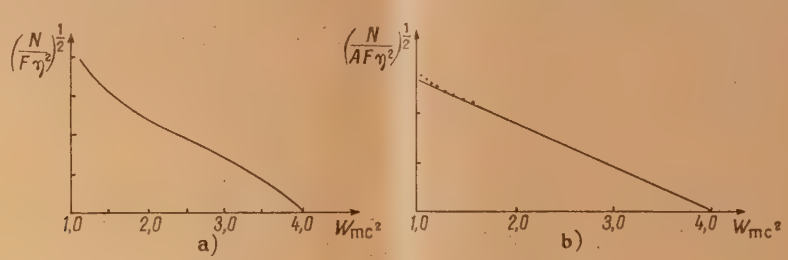


Fig. 8. — Diagrammes de Fermi données par Langer et Price [48] pour ^{91}Y.
a. Transition permise. *b.* Transition interdite.

On voit donc que l'étude de la forme des spectres par la méthode spectrométrique apporte des preuves sans cesse plus nettes à la théorie de Fermi et plus spécialement au choix d'intéraction de Gamow-Teller.

IV. — Étude des raies γ et des électrons de conversion.

Nous avons vu que le passage d'un état excité à l'état fondamental du noyau peut se faire par l'émission soit d'un photon γ, soit d'un électron de conversion.

Un rappel de méthodes d'étude des γ a été fait par Hines [2], Marty [10] et un article portant plus spécialement sur les raies de conversion a été publié par Cork [53] où il rassemble un grand nombre de valeurs numériques obtenues sur ce sujet.

L'étude directe des γ par une méthode analogue à celle utilisée pour les rayons X (spectromètre à cristal courbe) n'est possible, comme nous l'avons vu, que dans un nombre très restreint de cas. De façon générale, l'énergie et l'intensité des raies de photons sont mesurées en utilisant les électrons secondaires produits par effet compton, effet photoélectrique et matérialisation : le produit radioactif est placé dans une capsule métallique de paroi suffisamment épaisse pour absorber tous les β.

L'effet compton est prépondérant pour des γ de 0,2 à quelques mégaélectrovolts, les électrons secondaires présentant toutes les énergies entre zéro et une énergie maxima $E_c = \frac{2\alpha h\nu}{1+2\alpha}$ ou $\alpha = \frac{h\nu}{mc^2}$, $h\nu$ énergie du photon.

Réciproquement l'énergie des photons est donnée en fonction de l'énergie maxima E_c des électrons Compton par

$$h\nu = \frac{E_c}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2mc^2}{E_c}}\right).$$

La paroi de la capsule joue le rôle de diffuseur.

La figure 9 donne les résultats obtenus par Siegbahn [22] dans le cas de ^{56}Mn, la valeur E_c étant déterminée par le point d'inflexion de la courbe à l'endroit du front raide. Des mesures d'intensité peuvent être faites après étalonnage de l'efficacité

du diffuseur pour des γ de différentes énergies à l'aide d'éléments radioactifs émettant 2γ d'énergie et d'intensité bien connues. Les énergies peuvent être

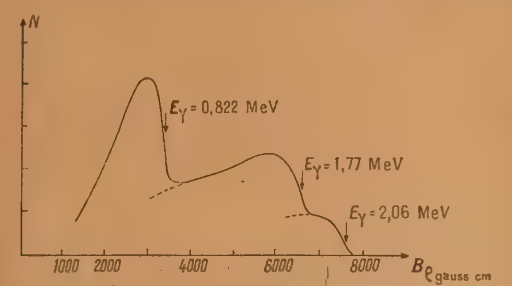


Fig. 9.— Études des γ par leurs électrons Compton ^{56}Mn [22 b].

ainsi déterminées avec une précision de 1 à 5 pour 100, la précision est moins bonne pour les intensités.

On obtient les valeurs des énergies à environ 0,5 pour 100 près par effet photoélectrique. Un photon d'énergie $h\nu$ tombant sur un radiateur de très faible épaisseur extrait des raies d'électrons monocinétiques d'énergies $h\nu - E_K$, $h\nu - E_L$, ..., où E_K, E_L, sont les énergies de liaison des électrons K, L du radiateur; l'intensité de cet effet est fonction de Z^5 (Z numéro atomique du radiateur) et les raies sont d'autant plus nettes et plus fines que le radiateur est plus mince; on utilise habituellement des feuilles minces d'uranium, de plomb ou d'or que l'on place sur l'extrémité de la capsule qui contient la source radioactive; le procédé a été indiqué pour la première fois par Deutsch, Elliot et Evans [17] qui donnent une méthode de calcul des efficacités des diffuseurs, ceci permet de déterminer le rapport des intensités des raies γ avec

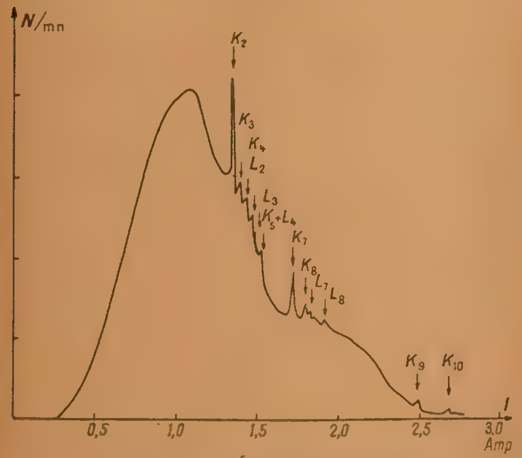


Fig. 10. — Électrons Compton et photoélectriques dus aux γ de ^{110}Ag [54].

une précision d'environ 20 pour 100. Lorsque l'énergie des photons croît et surtout au-dessus de 200 keV, le fond continu des électrons Compton rend la précision moins bonne; la figure 10 donnée par Siegbahn [54] dans l'étude de ^{110}Ag est un exemple des raies photoélectriques et du fond d'électrons Compton donnés par un radiateur de plomb de 3,7 μ ainsi que de l'attribution des raies.

L'effet de matérialisation qui ne devient important que pour des γ nettement plus énergiques ($h\nu \geqq 2$ à 3 MeV) n'a pas jusqu'à présent été beaucoup utilisé dans la méthode spectrométrique [55].

Lorsque l'émission de photons s'accompagne du phénomène de conversion interne, les électrons de conversion apparaissent en raies en même temps que le spectre continu β; si $h\nu$ est l'énergie des γ correspondants, l'énergie des raies d'électrons de conversion est $h\nu - E_K$, $h\nu - E_L$, ..., où E_K, E_L sont les énergies de liaison des électrons des couches K, L, etc. de l'atome après désintégration. Des sources très minces sont ici nécessaires car les électrons de conversion, d'énergie souvent faible, sont facilement diffusés dans l'épaisseur même de la source. On met ces raies en évidence soit avec un spectromètre magnétique à compteurs, il faut alors faire des mesures très rapprochées, soit avec un spectromètre à plaques de photo; cette dernière méthode semble donner une meilleure précision pour les valeurs des énergies; la mesure des intensités se fait par la méthode des

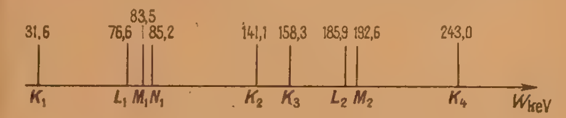


Fig. 11. — Raies photoélectriques de ^{160}Tb [56].

compteurs en comparant les hauteurs, ou les surfaces des raies, par la méthode photographique en utilisant un microphotomètre, dans ce cas elle nécessite un étalonnage de l'activité photographique, fonction de l'énergie des électrons.

Le rapport des intensités des raies de conversion dans les niveaux K, L, etc. donne une indication sur les différences de spin des niveaux entre lesquels ces raies sont émises.

La figure 10, raies obtenues par Siegbahn dans l'étude de ^{110}Ag donne un exemple de la façon dont se présentent les résultats dans une étude avec des compteurs; la figure 11 [56] donne un exemple de l'attribution des raies dans des expériences faites avec plaques de photo.

Par comparaison des surfaces des spectres et des raies de conversion on peut obtenir des valeurs approximatives des coefficients de conversion interne si le schéma de désintégration est supposé connu.

Étude des schémas de niveaux. — Nous avons vu dans les paragraphes précédents la détermination de l'énergie et de l'intensité des γ et de la forme des spectres β par la méthode spectrométrique : ce sont les résultats ainsi obtenus qui servent à l'établissement des schémas de niveau.

De plus dans le cas des spectres complexes il faut en déterminer les composantes et donner leurs énergies maxima et leurs intensités relatives; il n'existe pas de méthode rigoureuse pour ceci, on se base sur le fait que dans le cas des transitions permises, on doit obtenir une droite par la méthode du diagramme de Kurie et qu'il en est de même dans bien des cas de tran-

sitions interdites. Si N_W est le nombre expérimental d'électrons par unité d'énergie, on porte $\left(\frac{N_W}{pWF}\right)^{\frac{1}{2}}$ en

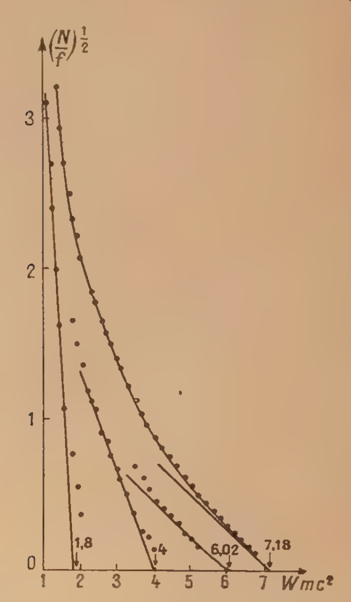


Fig. 12. — Décomposition en spectres simples du spectre complexe de ^{76}As [57].

fonction de W; on peut tracer une droite passant par les points d'énergies les plus élevées, on obtient ainsi W_{01} énergie maxima du spectre de plus grande énergie, on peut alors à partir de W_{01} recalculer le spectre simple qui aurait cette énergie maxima et le soustraire du spectre complexe expérimental; on obtient ainsi de proche en proche les valeurs W_{02}, W_{03} des énergies maxima des désintégrations partielles; la précision des résultats diminue quand le nombre des spectres soustraits augmente et il est bien souvent nécessaire d'utiliser les énergies des γ connus pour la détermination de W_{02}, W_{03}. Les intensités relatives sont données par les surfaces relatives des spectres partiels; la figure 12 représente une décomposition en spectres simples que nous avons effectuée dans le cas de la désintégration $^{76}_{33}\text{As} \xrightarrow{\beta} {}^{76}_{34}\text{Se}$ [57].

La méthode des coïncidences dont une étude générale est donnée dans l'article de Mitchell : *The use of coincidence counting methods in determining nuclear disintegration schemes* [58] est d'un grand secours pour l'établissement des schémas de désintégration; les résultats les meilleurs sont obtenus lorsque l'on peut tracer le spectre en coïncidence avec un rayonnement γ, cela nécessite des sources extrêmement intenses et des spectromètres à grand angle solide, l'énergie des γ n'est déterminée que par une méthode d'absorption d'où la difficulté d'établir un schéma avec certitude lorsqu'il y a un grand nombre de γ émis ou lorsque les énergies sont voisines. La figure 13 provenant d'un travail de Siegbahn et Johansson [30] déjà cité où une étude détaillée est faite de la technique des coïncidences en spectrométrie, représente le spectre de ^{42}K fait en coïncidence avec un γ, d'où l'on déduit l'énergie $W_{02} = 4{,}75\, mc^2$ (1,92 MeV) du deuxième spectre, l'énergie maxima du spectre complexe étant 3,6 MeV.

Le nombre d'articles relatifs à l'établissement des schémas de niveau des différents éléments formés par désintégration β est considérable, de l'ordre de plusieurs milliers depuis 1940; on ne peut estimer qu'un schéma est connu avec quelques certitudes que si plusieurs auteurs obtiennent des résultats concordants sur les énergies et les intensités des β et des γ. Pour plus de 350 isotopes actuellement connus en radioactivité artificielle, dans un article d'ensemble déjà cité [1] Mitchell donne une cinquantaine de schémas les mieux connus; de façon générale, il semble que plus on étudie un corps, plus le schéma obtenu se montre compliqué; au début des études spectrométriques en radioactivité artificielle on indiquait souvent un spectre β simple, un seul rayonnement γ, chaque β étant suivi par un γ. A titre

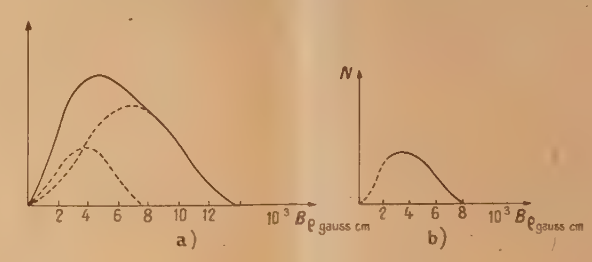


Fig. 13. — Spectres de ^{42}K.
a. Spectre total. *b.* Spectre fait en coïncidence [30].

d'exemple nous allons suivre l'étude de $^{131}_{53}$I de période 8 j qui, intéressant au point de vue biologique, a donné lieu à un assez grand nombre de travaux.

Dans les premières expériences faites par la méthode spectrométrique, Deutsch et col. [59, 59 *bis*] utilisant leur spectromètre à lentille magnétique et s'aidant de la méthode des coïncidences, donnaient pour ^{131}I un spectre β simple d'énergie maxima 0,595 MeV suivi d'un γ de 0,367 MeV lui-même suivi d'un γ

de 80 keV mis en évidence par ses électrons de conversion interne; le schéma de niveau est représenté sur la figure 14 *a*.

Reprenant cette étude en 1948, Metzger et Deutsch [60] conclurent à l'existence d'un spectre complexe, les spectres partiels ayant comme énergie maxima 600 et 315 keV; ils mettent en évidence 4γ de 80, 283, 363 et 638 keV et proposent le schéma de la figure 14 *b*.

Owen, Moe et Cook [61] trouvent sensiblement les mêmes valeurs d'énergie des γ mais indiquent un schéma différent (*fig.* 14 *c*).

Lind et Brown [62] précisent les énergies des γ les plus intenses avec le spectromètre à cristal courbe et donnent les valeurs numériques de $364,18 \pm 0,1$, $80,173 \pm 0,005$, $284,13 + 0,1$ keV.

Cork [63] avec son spectromètre à plaques de photo met en évidence 11 raies de conversion provenant de cinq photons, introduisant ainsi en plus des γ connus de 80, 284, 364 keV ceux 163,6 et 177 keV (*cf.* schéma, *fig.* 14 *d*).

Kern, Mitchell et Zaffarano [64] confirment l'existence d'un spectre β complexe mais les énergies maxima qu'ils donnent sont 605 et 250 keV, ils retrouvent les principaux γ connus (637, 363, 282, 80 keV) et peut-être un γ de 163 keV (schéma, *fig.* 14 *e*).

Enfin dernièrement Feister et Curtiss [65] donnent comme énergie maxima des spectres partiels 606 et 306 keV, leur schéma confirmant celui de Metzger et Deutsch (*fig.* 14 *b*).

Nous retrouvons ici les traits habituels de l'évolution d'un schéma, sa complication progressive, la précision croissante avec laquelle les valeurs numériques (énergie des γ) sont établies; mais des différences subsistent entre les schémas de niveau proposés d'autant plus difficiles à lever que les niveaux sont plus voisins.

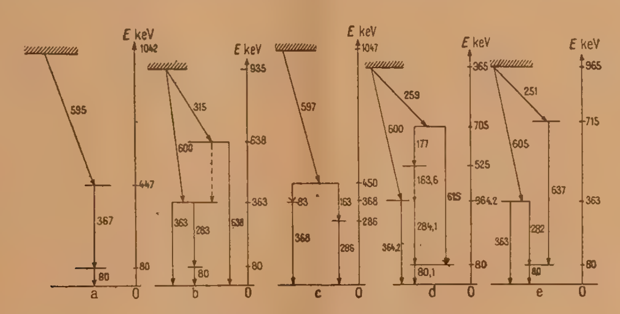


Fig. 14. — Les schémas de niveau successifs donnés pour $^{131}_{53}I$.

a. Deutsch [59]. *b*. Metzger et Deutsch [60]. *c*. Owen, Moe et Cook [61]. *d*. Cork [63]. *e*. Kern, Mitchell et Zaffarano [64].

Conclusion. — Nous avons tenté de montrer l'aspect actuel de la spectrométrie β et γ mais ce sujet se développe constamment et il n'y a pas de mois où ne soient publiés de nombreux travaux le concernant, soit que l'on étudie avec précision la forme de spectres simples de façon à pouvoir établir quelle interaction, ou quel mélange d'interactions prévues par la théorie s'accorde le mieux avec les résultats expérimentaux, soit que l'on précise des schémas de niveau encore imparfaitement connus ou que l'on en étudie de nouveaux. Dans ce domaine la connaissance d'un grand nombre de schémas est indispensable à la recherche de lois générales régissant la répartition des niveaux d'énergie : espacement régulier des niveaux pour certains corps, ou existence de niveaux identiques pour différents noyaux.

Manuscrit reçu le 25 octobre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Mitchell. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 36.
[2] Hine. — *Nucleonics*, 1949, **4**, 56.
[3] Hill. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 78.
[4] Cork. — *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 581.
[5] Cranberg. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 155.
[6] Hey et Latishev. — *J. Phys. U. S. S. R.*, 1946, **10**, 446.
[7] Kurie et Ter Pogossian. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 677.
[8] Saxon. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 849.
[9] Lévy et Greuling. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 819.
[10] Marty N. — *Thèse de Doctorat.*
[11] Owen. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 916.
[12] Fowler, Shreffler et Cork. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 966.
[13 *a*] Langer et Cook. — *Rev. Sc. Instr.*, 1948, **19**, 257.
[13 *b*] Bruner et Scott. — *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 545.
[14] Witcher. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 32.
[15] Wu, Havens et Albert. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 1259.
[16] Persico. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 191.
[17] Deutsch, Elliot et Évans. — *Rev. Sc. Instr.*, 1944, **15**, 178.
[18] Quade et Halliday. — *Rev. Sc. Instr.*, 1948, **19**, 237.
[19] Miller et Curtis. — *Bur. Stand. J. Research*, 1947, **38**, 359.
[20] Kern, Zaffarano et Mitchell. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 1142.
[21] Agnew et Anderson. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 869.
[22] Siegbahn. — *a. Ark. fur mat. Astr. Fys.*, 1944, **30**, n° 1; *b. Phil. Mag.*, 1946, **37**, 162.
[23] Siegbahn. — *Ark. für Mat. Astr. Fys.*, 1946, **33**, n°s 21 et 24.

[24] Kurie, Osoba et Slack. — *Rev. Sc. Instr.*, 1948, **19**, 771.
[25] Shull et Dennison. — *Phys. Rev.*, 1948, **71**, 917.
[26] Backus. — *Phys. Rev.*, 1945, **68**, 59.
[27] Du Mond. — *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 626; *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1226.
[28] Lind, Brown, Klein, Muller et Du Mond. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1544.
[29] Feather. — *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1940, **36**, 209.
[30] Siegbahn et Johansson. — *Ark für Mat. Astr. Fys.* 1946, **34**, n° 10.
[31] Katz, Hill et Goldhaber. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 9.
[32] Arnoult. — *Ann. Physique*, 1939, **12**, 312.
[33] Brown. — *Rev. Sc. Instr.*, 1948, **19**, 818.
[34] Mac Pherson. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 457.
[35] Langer. — *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 216.
[36] Langer, Motz et Price. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 798.
[37] Ter Pogossian, Robinson et Cook. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 995.
[38] Owen et Cook. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 684.
[39] Brown et Perez-Mendez. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 649.
[40] Konopinski. — *Rev. Mod. Phys.*, 1943, **15**, 209.
[41] Cook et Langer. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 601.
[42] Wu et Albert. — *Phys. Rev.*, 1949, **15**, 315.
[43] Longmire et Brown. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 264 et 1102.
[44] Langer, Moffat et Price. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1725.
[45] Owen et Cook. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 1726.
[46] Cook et Langer. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 227.
[47] Boehm, Blaser, Marmier et Preiswerk. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 290.
[48] Langer et Price. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1109.
[49] Jensen et Laslett. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1949.
[50] Braden et Slack. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1964.
[51] Shull. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 463.
[52] Langer et Price. — *Phys. Rev.*, 1942, **76**, 454 et 641.
[53] Cork. — *Nucléonics*, 1949, **4**, 24.
[54] Siegbahn. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 236.
[55] Siegbahn et Johansson. — *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 442.
[56] Cork, Shreffler et Fowler. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 240.
[57] Marty, Laberrigue et Langevin. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1722.
[58] Mitchell. — *Rev. Mod. Phys.*, 1948, **20**, 296.
[59] Deutsch. — *Phys. Rev.*, 1941, **59**, 940.
[59 *bis*] Downing, Deutsch et Roberts. — *Phys. Rev.* 1942, **61**, 389 et 686.
[60] Metzger et Deutsch. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1641.
[61] Owen, Moe et Cook. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1879; 1949, **75**, 1271.
[62] Lind et Brown. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1544.
[63] Cork. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1621.
[64] Kern, Mitchell et Zaffarano. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 94.
[65] Feister et Curtiss. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 179
[66] Judd. — *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 213.
[67] Rosenblum. — *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 586.
[68] Owen et Primakoff. — *Phys Rev.*, 1948, **74**, 1406; *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 447.
[69] Kofoed-Hansen, Lindhard et Nielsen. — *Det. Kgl Danske Vidensk Selskab*, 1950, **25**, n° 16.
[70] Siegbahn et Slatis. — *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 1949, **36 A**, n° 22.
[71] Rae. — *Phil. Mag.*, 1950, **41**, 525.
[72] Chen. — *Rev. Sc. Instr.*, 1950, **21**, 491.
[73] Persico-Goeffrion. — *Rev. Sc. Inst.*, 1950, **21**, 945.
[74] Wu. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 386.

LETTRES AUX ÉDITEURS

CRYOSTAT MÉTALLIQUE POUR L'ÉTUDE DES DÉPÔTS SOLIDES OBTENUS PAR CONGÉLATION D'UN JET GAZEUX

Par MM. Jacques Romand et Boris Vodar.
Laboratoire de Physique-Enseignement de la Sorbonne.

Le cryostat dont nous donnons ci-dessous une rapide description est destiné à l'étude des propriétés physiques (et particulièrement des propriétés optiques) des solides obtenus par congélation à basse température d'un jet gazeux (pour les liquides voir [1]). Il comporte certains perfectionnements sur celui de Thomas [2] qui nous a servi de point de départ.

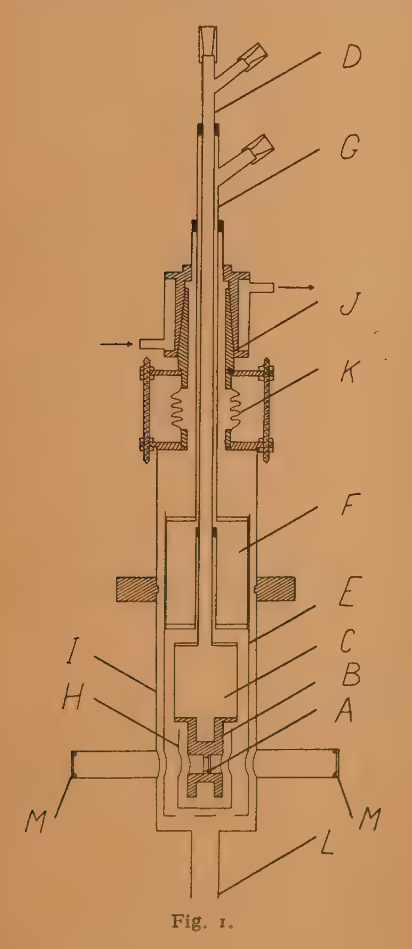


Fig. 1.

La fenêtre A (*fig.* 1) sur laquelle on fait le dépôt est collée au vernis dans la pièce massive de cuivre rouge B, elle-même refroidie par le gaz liquéfié contenu dans le récipient C alimenté par le tube D. Une enceinte E refroidie par le gaz liquéfié contenu dans le récipient F alimenté par le tube G entoure l'ensemble ABC, afin d'éviter : 1° un rayonnement excessif sur la fenêtre (un cache en clinquant poli H limite d'ailleurs encore ce rayonnement); 2° le dépôt sur la fenêtre d'impuretés provenant d'un dégazage éventuel du reste de l'appareil. L'ensemble ABCHEF est placé dans une dernière enceinte I qui n'est pas refroidie et sert d'enceinte étanche pour le vide, le pompage étant fait par le tube L. La membrane K permet de petits réglages d'orientation de cet ensemble.

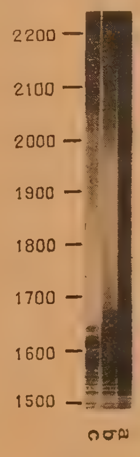


Fig. 2.

Dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'appareil au niveau de A, se trouvent, d'une part quatre fenêtres M disposées dans deux directions perpendiculaires et, d'autre part, l'éjecteur par lequel sort le gaz; celui-ci est placé sur l'enceinte I et dans une direction faisant un angle de 45° avec celles des fenêtres. Enfin l'ensemble ABCDEFGH peut tourner au moyen du rodage graissé J réchauffé par circulation d'eau. On peut donc par simple rotation : 1° faire le dépôt et 2° faire deux séries d'observations sur ce dépôt par deux méthodes distinctes, par exemple absorption optique dans deux régions spectrales différentes, ou mesure du pouvoir réflec-

teur, etc. D'autre part, l'éjecteur se trouve sur la normale à la fenêtre A au moment où l'on fait le dépôt, ce qui constitue un perfectionnement important sur des cryostats comme celui de Cassel [3].

La température est repérée au moyen d'un couple thermoélectrique soudé sur B et en contact avec A. L'expérience nous a montré que l'équilibre de température entre le gaz liquéfié contenu dans C et ce point était atteint en quelques minutes. D'autres moyens sont à l'étude en vue de mesurer directement la température de la fenêtre A. Enfin les rodages montés sur le tube D permettent de pomper dans le réservoir C et d'approcher ainsi, en principe, le point triple de l'hydrogène, soit 14° K environ.

Ce cryostat est actuellement monté sur notre appareil pour l'étude de l'absorption ultraviolette dans la région de Schumann [4]. A titre d'exemple la figure 2 représente les spectres obtenus avec le benzène : *a*. sans absorbant; *b*. benzène solide; *c*. benzène à l'état vapeur. Le déplacement de la bande vers les grandes longueurs d'onde est parfaitement visible.

Manuscrit reçu le 13 mars 1951.

[1] Mayence J. et Vodar B. — *C. R. Acad. Sc*, 1950, **230**, 634.
[2] Thomas H. — *Ann. der Physik*, 1940, **38**, 604.
[3] Cassel E. J. — *Proc. Roy. Soc.*, 1935, **153**, 534.
[4] Romand J. — *Ann. Physique*, 1949, **4**, 529.

ÉVAPORATION DANS LE VIDE PAR BOMBARDEMENT DIRECT AU MOYEN D'UN CANON A ÉLECTRONS

Par MM. J. Brochard, P. Giacomo, P. Jacquinot et S. Roizen.

Pour éviter l'attaque du support par la substance à évaporer, nous avons songé à bombarder directement la surface de la substance au moyen d'un faisceau électronique.

Le canon est du type classique employé dans les tubes à rayons X; nous avons utilisé généralement une tension accélératrice continue de 2 000 à 5 000 V et un débit électronique de 10 à 50 mA (canon à la masse). Le spot électronique couvre à peu près 2 mm² et la cible peut être déplacée au moyen d'un joint Wilson; la substance à évaporer est supportée par un fil de tungstène, ou posée sur une petite coupelle en fil de tungstène, ou même sur un support isolant; sa distance au canon est d'environ 2 cm.

Les avantages de la méthode sont dus essentiellement au fait que, l'énergie étant apportée directement sur la surface à évaporer, le support reste à une température nettement inférieure à la température d'évaporation : dans les autres procédés, au contraire, il est nécessairement à une température supérieure, ce qui favorise son attaque. Certaines substances peuvent ainsi être évaporées dans d'excellentes conditions de pureté et en grande quantité. Ces avantages disparaissent d'ailleurs en partie dans le cas des substances métalliques liquides à la température d'évaporation : dans ce cas, il est nécessaire de poser le métal sur un support qui risque d'être mouillé et dont l'attaque peut être favorisée par l'action des électrons.

La méthode s'applique aussi bien aux substances non conductrices telles que la silice, l'alumine, et les oxydes réfractaires : dans ce cas, le courant électronique est évacué, non par conduction, mais grâce à l'émission secondaire (y compris éventuellement l'émission thermionique); dans ce cas, il est préférable d'ajouter une anode, par exemple en forme d'anneau, qui joue le rôle d'électrode collectrice et accélératrice.

A titre d'exemple, nous avons pu ainsi évaporer

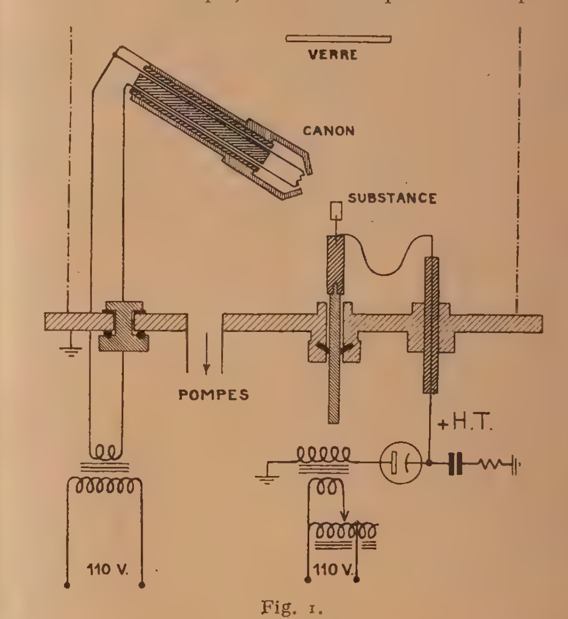


Fig. 1.

facilement le chrome (en bâtonnet) en très grandes quantités (plusieurs grammes en une seule opération), l'aluminium (posé sur alumine), le tungstène (en tige), le carbone, la silice, la glucine et l'alumine fondues.

Manuscrit reçu le 9 avril 1951.

REMARQUES SUR L'ÉTUDE DE L'ABSORPTION INFRAROUGE PAR LA MÉTHODE DES POUDRES

Par J.-P. Mathieu.
Laboratoire des Recherches Physiques, Sorbonne.

La difficulté d'obtenir maints composés solides sous forme de monocristaux de surface assez grande ou d'épaisseur assez faible, a conduit à étudier leurs spectres infrarouges de réflexion ou d'absorption sur des couches déposées, par vaporisation ou après broyage, sur un support convenable.

Barnes [1] a fait une étude comparée de la réflexion par des surfaces de chlorure de sodium cristallisé,

fondu ou pulvérisé. Le facteur de réflexion varie en raison inverse de la taille moyenne des grains de la poudre, mais la longueur d'onde du maximum de réflexion (rayons restants) ne change pas.

Il doit en être autrement dans le cas de l'absorption. Les multiples réflexions que subit le faisceau incident sur les parcelles de la poudre dont les dimensions ne sont pas petites au regard de la longueur d'onde, ont un effet beaucoup plus important sur les rayons restants, dont les fréquences sont différentes des fréquences propres d'absorption, que sur les radiations qui possèdent ces dernières fréquences. Il en résulte que l'affaiblissement sélectif exercé par la couche de poudre sur un flux de rayonnement incident dépend, non seulement de la valeur du facteur d'absorption vrai au voisinage des fréquences propres, mais encore de celle du facteur de réflexion pour les fréquences voisines des rayons restants : d'où un déplacement apparent de l'absorption vers les régions de réflexion sélective, lorsque le grain de la poudre devient assez gros.

Le phénomène s'observe en effet : étudiant l'absorption de couches minces de chlorure de sodium obtenues par vaporisation dans le vide, Czerny et Barnes [2] ont indiqué que certains détails fins des courbes d'absorption disparaissent dès que les couches deviennent granuleuses; mais ce qu'on voit également sur les courbes publiées (*loc. cit.*, *fig.* 9), c'est l'élargissement du minimum de transmission et son déplacement depuis 61,1 μ pour les couches les plus minces, jusqu'à 60 μ pour les couches dont le grain commence à être visible; or, la longueur des rayons restants du sel gemme est 52 μ.

On doit en conclure que, quelque grands que soient les services rendus dans de très nombreux cas par l'étude du spectre d'absorption infrarouge de poudres obtenues par broyage [3], la méthode est cependant entachée d'une cause d'erreur systématique dans la détermination précise des fréquences propres auxquelles correspond une valeur élevée du facteur de réflexion.

Manuscrit reçu le 30 mars 1951.

[1] Barnes R. B. — *Physical Review*, 1933, **43**, 31.
[2] Czerny M. et Barnes R. B. — *Zeits. für Physik*, 1931, **72**, 447; *voir* aussi Wagner E. L. et Hornig D. F. — *J. Chem. Phys.*, 1950, **18**, 299.
[3] Lecomte J. — *Cahiers de Physique*, 1943, n° 17, 1.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA DÉTECTION DES GAZ ET LA MESURE DE LEUR PRESSION PAR ABSORPTION OPTIQUE DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN

Par MM. Jacques Romand, Vladimir Schwetzoff et Boris Vodar.

Laboratoire de Physique-Enseignement de la Sorbonne.

L'absorption optique des gaz et des vapeurs peut être avantageusement mise à profit pour leur détection et la mesure de leur pression. L'ultraviolet lointain (dans la région de Schumann qui s'étend de 1 850 à 1 200 Å) est, en principe, une région spectrale particulièrement indiquée; elle offre en effet la possibilité de déceler directement l'air par sa teneur en oxygène, ainsi que la plupart des gaz transparents dans le visible et l'ultraviolet moyen.

On peut prévoir de nombreuses applications pratiques dont les principales semblent être la mesure des pressions relativement basses et la détection des fuites dans les appareils à vide. En effet, pour certaines vapeurs comme le benzène [1] [2] [3], le coefficient d'absorption atteint des valeurs très élevées, d'où la possibilité de déceler de faibles pressions (moins de 2 μ de Hg pour une épaisseur de 1 m). La détection des fuites se fait donc en employant, comme avec les autres méthodes de détection, un indicateur gazeux ou liquide en pulvérisation ou badigeonnage extérieur, et en guettant un changement dans la lecture de l'appareil de mesure de la pression au moment où cet agent pénètre dans l'enceinte. L'expérience nous a montré que la sensibilité de cette méthode est très supérieure à celle d'un simple voyant dans lequel on observe le changement de coloration de la décharge.

Nous donnerons une rapide description des essais que nous avons effectués sur l'air [1], en vue de la mesure de la densité de l'air dans une soufflerie aérodynamique de 40 cm, la pression moyenne étant de l'ordre de 6 cm de Hg. Dans ce cas l'avantage de cette méthode est de donner directement une mesure de la densité.

L'azote étant transparent dans le domaine spectral envisagé, c'est l'oxygène qui joue le rôle d'absorbant, sous réserve que l'air soit exempt d'autres corps. Entre 1 350 Å et 1 700 Å l'oxygène présente une bande d'absorption unique [4] dont le maximum est à 1 450 Å.

Dans cette première réalisation, nous n'avons pas employé de monochromateur; la bande spectrale utilisée est délimitée du côté des grandes longueurs d'onde par le seuil de la cellule à cathode de platine (2 000 Å environ), de l'autre côté par la partie montante de la courbe d'absorption, et enfin au delà par les matériaux optiques utilisés pour le montage. Mais, à cause de la largeur de la bande spectrale ainsi définie, un étalonnage préalable est nécessaire.

D'autre part nous avons utilisé à la suite de la cellule une lampe électromètre double E 2 dont l'élément bien isolé sert à l'amplification du courant photoélectrique; en agissant sur le potentiel-grille de l'autre élément, on peut compenser le courant-plaque du premier, de façon que le courant résultant soit nul à l'origine de l'échelle de pression que nous choisissons. La sensibilité de l'ensemble est réglée en agissant sur l'intensité de la source et la résistance de charge de la cellule. Le montage pratique comprenait simplement une lampe à hydrogène à fenêtre de fluorine, un tube de 40 cm relié à une pompe et à un manomètre, enfin la cellule au platine

[1] Travaux entrepris à la demande de M. l'Ingénieur Principal Tesson du Laboratoire de Recherches balistiques et aérodynamiques

dont la fenêtre était en quartz soufflé, ces trois éléments étant reliés par des rodages coniques.

Nous pouvons résumer ainsi les résultats obtenus :

a. Le courant débité par la cellule en l'absence d'éclairage ultraviolet est nul;

b. Le courant obtenu (il s'agit du courant débité par l'amplificateur), en allumant la lampe à hydrogène (100 mA), avec le tube plein d'air, est de 6 μA environ;

c. Ce courant croît dans un rapport de 1,5 environ, lorsqu'on passe de la pression atmosphérique à une pression de 0,2 cm de Hg;

d. La variation du courant entre 2 et 14 cm de Hg est représentée par la courbe ci-contre, la compensation ayant été faite de façon que le courant soit nul pour une pression de 14 cm de Hg.

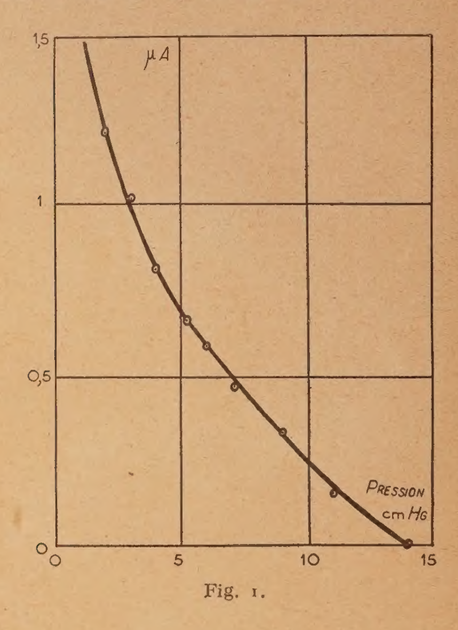


Fig. 1.

Nous nous proposons de poursuivre les essais en vue des autres applications signalées plus haut, ainsi que l'amélioration du dispositif d'amplification (emploi de multiplicateurs d'électrons construits spécialement pour l'ultraviolet lointain [5]).

Manuscrit reçu le 12 avril 1951.

[1] Radle W. F. and Beck C. A. — *J. Chem. Phys.*, 1940, **8**, 507.

[2] Sklar A. L. — *Rev. Mod. Phys.*, 1942, **14**, 232.

[3] Price W. C. and Walsh A. D. — *Proc. Roy. Soc.*, 1947, **191**, 22.

[4] Ladenburg R. et Van Voorhis C. C. — *Phys. Rev.*, 1933, **43**, 315.

[5] Schwetzoff V. et Robin S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1759.

MONOCHROMATEUR DOUBLE, A VIDE, POUR L'ULTRAVIOLET.

Par Mme Simone Robin et M. Boris Vodar.

Laboratoire Physique-Enseignement de la Sorbonne.

Le premier monochromateur dans le vide pour l'ultraviolet fut celui de Hilsch et Pohl [3], monochromateur double à prismes, mais n'allant que jusqu'à 1 600 Å; puis, il y eut celui de Baker [1] à un réseau concave utilisé tangentiellement.

A l'heure actuelle, Parkinson et Williams [5] et d'autres chercheurs aux États-Unis travaillent sur des monochromateurs à réseaux concaves pour l'ultraviolet. Mais, à notre connaissance, actuellement notre appareil est le seul qui soit universel, c'est-à-dire qui puisse fonctionner en monochromateur simple et double et ceci, soit avec des réseaux concaves en incidence normale, soit avec des prismes de Féry, soit avec un montage de Littrow, grâce à des dispositifs mécaniques simples.

Il faut le considérer comme un appareil permettant les essais des diverses possibilités optiques en vue de travaux très variés soit à forte luminosité, soit à pouvoir séparateur élevé (1). Sa description a été remise jusqu'à maintenant parce que nous voulions avoir quelques données expérimentales sur son fonctionnement dans l'ultraviolet à vide.

Jusqu'ici, nous ne l'avons utilisé qu'en monochromateur simple avec un réseau concave.

Le montage optique est celui d'Eagle [2], que l'on sait pratiquement astigmatique [8]. Le système de focalisation et les autres possibilités ont déjà été étudiées [6]. La pièce optique essentielle est un réseau « aluminium sur verre » gravé par le N. P. L. à 570 traits par millimètre et 1 m de rayon. Sa dispersion est 18 Å : mm. La description détaillée de l'appareil et de son système de pompage a été donnée [7]. Il comprend principalement :

— une partie fixe avec une manivelle de Mönch [4] assurant le mouvement de focalisation;

— une partie mobile en forme de cloche coulissant sur des rails.

Le pompage comprend :

Circuit primaire, une pompe à palettes Beaudoin (20 m³ : h).

Circuit secondaire, une pompe à Hg ECM 20 (20 l : s) de la CGR et une pompe à huile oléovap de la CGR (35 l : s) suivie d'un piège métallique, cela principalement en vue de protéger notre réseau. Nous obtenons ainsi un vide de 10^{-6} mm de Hg.

La source utilisée est une lampe à hydrogène Gallois toute en quartz fonctionnant à 800 mA fermée par une lentille en FLi formant une image du capillaire sur la fente d'entrée. Nous avons constaté

(1) La construction a été effectuée par les Établissements Ch. Beaudoin, 1 et 3, rue Rataud, Paris (5e) que nous sommes heureux de remercier. C'est un plaisir pour nous d'adresser nos plus vifs remerciements à M. Gondet qui a dirigé l'étude mécanique de cet appareil.

une forte formation d'ozone : ainsi dans un vide de 10^{-3} mm de Hg environ, le maximum d'absorption de 2 550 Å et s'étendant jusqu'à 2 000 Å apparaît nettement, si nous améliorons notre vide jusqu'à 10^{-5} et 10^{-6} mm Hg, cette absorption finit par disparaître complètement.

Cet appareil nous a permis d'obtenir les résultats suivants avec des fentes de 0,6 mm (*voir* figure).

1° Tracé de la courbe de réponse photoélectrique d'un multiplicateur d'électrons électromagnétique à fenêtre de quartz de 1 mm d'épaisseur fabriqué au laboratoire [9] s'étendant jusqu'à 1 600 Å avec un courant de l'ordre de $2 \cdot 10^{-8}$ A, ceci avec une lampe H^2 type Chalonge à 200 mA.

2° Étude de la fluorescence de diverses poudres (1. et 2. poudres fluorescentes bleue et verte; 3. halophosphate de Ca + 1 pour 100 orthosilicate Zn; 4. halophosphate de Ca + 2,5 pour 100 tungstate Mg; 5. salycilate de Na; 6. tungstate de Ca dans la région

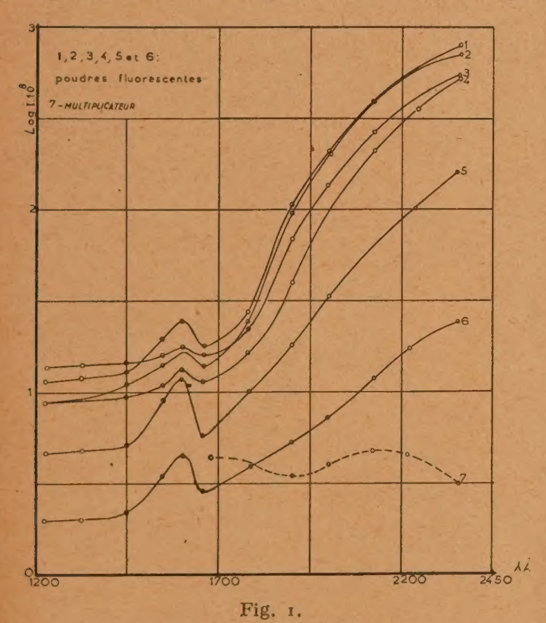


Fig. 1.

de Schumann, ces poudres étant déposées sur l'enveloppe même d'un photomultiplicateur RCA à cathode Cs — Sb. Ceci permet d'étendre le domaine de sensibilité de 2 000 à 1 350 Å.

D'autres études sont en cours et un dispositif permettant la mesure du pouvoir réflecteur, de l'absorption et de la photoconductivité vient d'être construit. Des études de photoémission des métaux purs sont projetées en collaboration avec M. Schwetzoff.

Manuscrit reçu le 17 mars 1951.

[1] Baker R. F. — *Journ. Soc. Amer.*, 1938, **28**, 55.
[2] Eagle. — *Astrophysical J.*, 1940, **1**, 120.
[3] Hilsch et Pohl R. W. — *Z. Physik*, 1930, **59**, 812.
[4] Mönch G. — *Vacuumtechnik im Laboratorium*, R. Wagner Weimar.
[5] Parkinson W. W. jr et Williams F. E. — *Journ. Soc. Amer.*, 1949, **39**, 705.
[6] Robin Mme S. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11** (**5**), 247-248.
[7] Robin Mme S. — *Diplôme d'Études Supérieures*, 1949.
[8] Runge et Mannkopff. — *Z. Physik*, 1927, **45**, 13.
[9] Schwetzoff V. et Robin Mme S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1759-1761.

SUR LA THÉORIE DU MODÈLE MÉTALLIQUE DE MOLÉCULES POLYMÉTHINES TENANT COMPTE DE L'IONISATION. APPLICATION AU SPECTRE ULTRAVIOLET

Par S. Nikitine et S. G. El Komoss.

Institut de Physique
de l'Université de Strasbourg
et Physics Department,
Farouk I University, Alexandrie.

Le modèle métallique de molécules polyméthines permet de calculer leur spectre d'absorption [1], [2]. Nous avons développé cette théorie et nous avons comparé les résultats auxquels elle conduit avec les données expérimentales [3], [4], [5], [6]. L'accord avec la théorie n'est pas toujours satisfaisant. Nous nous sommes proposé de voir si cet accord pouvait être amélioré en perfectionnant la théorie.

Dans le « modèle métallique » on admet que les électrons π d'une chaîne de doubles liaisons conjuguées en résonance forment un gaz électronique distribué le long de la chaîne et sont soumis à un potentiel nul le long de la chaîne et infini à ses extrémités et de part et d'autre de celle-ci. Ce modèle ne rend pas compte de l'ionisation, les électrons ne pouvant pas quitter la « boîte de potentiel ». Nous nous sommes proposé de perfectionner la théorie en supposant que les électrons sont soumis à un potentiel $-V_0$ le long de la chaîne et nul aux deux extrémités de celle-ci. Ce modèle rend compte de l'ionisation. Dans ce modèle, les états quantiques des électrons sont obtenus par la résolution graphique d'équations transcendantes. Les énergies de ces états dépendent de deux paramètres, la longueur L de la « boîte de potentiel » et sa « profondeur » V_0. Pour fixer ces paramètres nous avons fait usage de données expérimentales, en particulier de la longueur d'onde de la première bande d'absorption et de celle correspondant à la bande extrême U. V. qu'il paraît plausible de faire correspondre à l'ionisation [5]. En effet cette bande, dont le commencement seulement a été observé, existe dans les spectres de tous les colorants étudiés indépendamment des groupements aux extrémités de la chaîne. Sa position dans le spectre reste à peu près la même dans une série d'homologues. Enfin son intensité est plus grande que celle des autres bandes secondaires dans l'U. V. Ayant fixé ainsi les deux paramètres nous avons calculé l'emplacement des bandes secondaires dans l'U. V.

Les résultats de nos calculs, sont relatifs à quatre homologues de l'un des colorants étudiés. La figure représente les courbes d'absorption de ces colorants.

Les flèches simples indiquent la position des bandes U. V. prédites par la théorie simple; les flèches à double trait celle des bandes prédites par

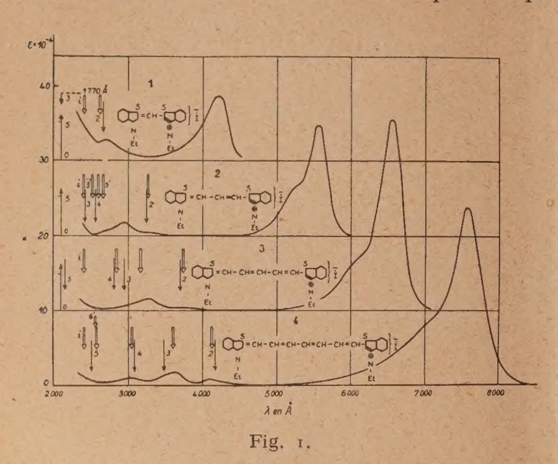


Fig. 1.

la théorie perfectionnée. La transition i correspond à la bande d'ionisation. Le tableau donne les valeurs des paramètres, s étant la distance CC dans la chaîne ($s = 1,39$ Å).

Homologue.	1.	2.	3.	4.
$\frac{L}{s}$	4,48	6,64	8,5	10,32
$-V_0$ (eV).....	7,67	8,09	8,53	8,93

On voit que la théorie est plus satisfaisante : d'une part, elle s'accorde mieux avec l'expérience; d'autre part, elle rend compte de l'ionisation. Toutefois elle comporte deux paramètres au lieu d'un; de plus, les calculs sont laborieux. Aussi l'utilisera-t-on quand on cherchera à accroître la précision. Nous donnerons plus de détails et discuterons cette théorie sous différents aspects dans de prochaines publications.

[1] Bayliss N. L. — *J. Chem. Phys.*, 1948, **16**, 287.
[2] Kuhn H. — *H. C. A.*, 1948, **31**, 1443; *Z. Elektrochem.*, 1949, **53**, 165.
[3] Nikitine S. — *H. P. A.*, 1949, **22**, 595; *J. Chimie Physique*, 1950, **47**, 614.
[4] Nikitine S. et El Komoss S. G. — *J. Chimie Physique*, 1950, **47**, 789.
[5] Nikitine S. — *J. Chimie Physique*, 1951, **48**, 37.
[6] Nikitine S. et El Komoss S. G. — *J. Chimie Physique*, 1951, **48**, 44.

Le Gérant : Maurice Blondin. 138064 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1951.